



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél: (1) 39 63 55 11

Rapports Techniques

N° 109

Programme 7

*Calcul Scientifique, Logiciels Numériques
et Ingénierie assistée par Ordinateur*

EVALUATION DES ELEMENTS FINIS MODULEF A L'AIDE DU SYSTEME EXPERT DOMINO

**Patrick LAUG
Alain PERRONNET**

Juillet 1989



★ R T - 8 1 8 9 ★

EVALUATION DES ELEMENTS FINIS MODULEF A L'AIDE DU SYSTEME EXPERT DOMINO

Patrick LAUG, Alain PERRONNET

Projet MODULEF, I.N.R.I.A., B.P. 105
78153 LE CHESNAY CEDEX (FRANCE)

RÉSUMÉ

Un "superviseur de code" est un système qui pilote un logiciel en fonction d'une base de connaissances et de résultats calculés dynamiquement. Basé sur ce concept, le système expert DOMINO a permis de traiter de nombreux exemples en utilisant la bibliothèque d'éléments finis MODULEF. Ce rapport présente ces exemples (thermique et élasticité, 2D, 3D, axisymétrique, coque) ainsi qu'une comparaison entre les différents éléments finis.

EVALUATION OF THE FINITE ELEMENTS MODULEF USING THE EXPERT SYSTEM DOMINO

ABSTRACT

A "code supervisor" is a system that controls a software package depending on a knowledge base and dynamically computed results. Based on this concept, the expert system DOMINO allowed us to deal with numerous examples using the finite element library MODULEF. This report describes these examples (heat transfer and elasticity, 2D, 3D, axisymmetric, shell) as well as a comparison between the different finite elements.

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION

2. THERMIQUE 2D

2.1 Fonction étudiée

2.2 Maillage

2.3 Conditions aux limites

2.4 Exécution avec DOMINO

2.5 Comparaison des éléments

2.6 Conclusions

2.7 Confrontation des conclusions avec un autre test

3. THERMIQUE 3D

4. ELASTICITE 2D

5. ELASTICITE 3D

6. THERMO-ELASTICITE AXISYMETRIQUE

7. COQUE MINCE

8. CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

Eléments finis de MODULEF présents dans la base de connaissances de DOMINO

1. INTRODUCTION

Un "superviseur de code" est un système qui possède une base de connaissances sur un logiciel et joue à la fois un rôle de pré-traitement, de post-traitement, et de contrôle en fonction des résultats intermédiaires. Basé sur ce concept, le système expert DOMINO* (Laug, 1987) a permis de traiter de nombreux exemples en utilisant la bibliothèque d'éléments finis MODULEF (Bernadou & col., 1988). Ces passages ont permis d'atteindre un double objectif :

- a) tester de manière aussi exhaustive que possible le système expert DOMINO,
- b) tester et éventuellement comparer entre eux les éléments de la bibliothèque MODULEF.

Compte tenu de la grande variété des éléments disponibles, plusieurs types de tests ont été réalisés dans le cadre de cette étude :

- Thermique 2D
- Thermique 3D
- Elasticité 2D
- Elasticité 3D
- Thermo-élasticité axisymétrique
- Coque mince

Les résultats de ces différents tests sont présentés ci-après.

* Recherche financée par la DRET, convention n°87.34.225.00.470.75.01.

2. THERMIQUE 2D

Afin de disposer d'un critère objectif de comparaison, il est préférable de résoudre un problème dont la solution analytique est déjà connue. Il suffit alors de mesurer l'écart entre cette solution exacte et les résultats calculés par éléments finis. Dans ce chapitre sont présentés successivement :

- la fonction choisie a priori,
- divers problèmes thermiques dont la fonction précédente est solution,
- une évaluation des éléments finis testés.

2.1. Solution analytique

La solution analytique proposée est la suivante :

$$u(x,y) = \frac{1}{x+y+\varepsilon} \quad \text{avec } x, y \in [0,1] \text{ et } \varepsilon > 0$$

Cette fonction a été choisie car elle n'est pas polynômiale et présente une singularité au voisinage de l'origine. En fait, si ε est trop petit, seuls quelques éléments très proches de l'origine sont mis à contributions. La valeur retenue finalement est donc :

$$\varepsilon = 0.1$$

Le schéma ci-dessous donne l'allure de cette fonction :

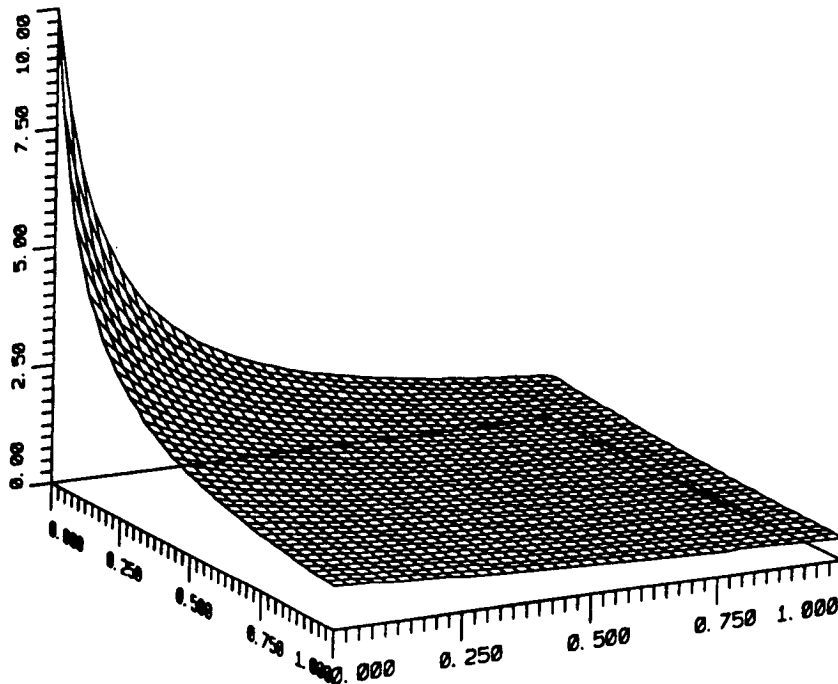


Fig. 2.1 : représentation graphique de la fonction $u(x,y) = \frac{1}{x+y+0.1}$ sur le carré unité.

2.2. Maillage

Compte tenu de la fonction $u(x,y)$ qui présente un fort gradient près de l'origine, il est préférable d'affiner le maillage dans cette zone. Nous avons choisi de donner un pas h tel que l'accroissement de la fonction soit constant sur les bords, afin d'homogénéiser l'erreur produite :

$$u(x,0) - u(x+h,0) = c \text{ sur le segment } (0,0) \text{ à } (1,0)$$

$$u(1,y) - u(1,y+h') = c' \text{ sur le segment } (1,0) \text{ à } (1,1)$$

Si n est le nombre de points sur chaque côté du carré (extrémités incluses), h et h' sont obtenus à l'aide des formules :

$$c = \frac{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}}{n-1}$$

$$h = \frac{c(x+\varepsilon)^2}{1-c(x+\varepsilon)}$$

$$c' = \frac{\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{2+\varepsilon}}{n-1}$$

$$h' = \frac{c(x+1+\varepsilon)^2}{1-c(x+1+\varepsilon)}$$

Un exemple de maillage en quadrangles avec $n=8$ est donné figure 2.2 :

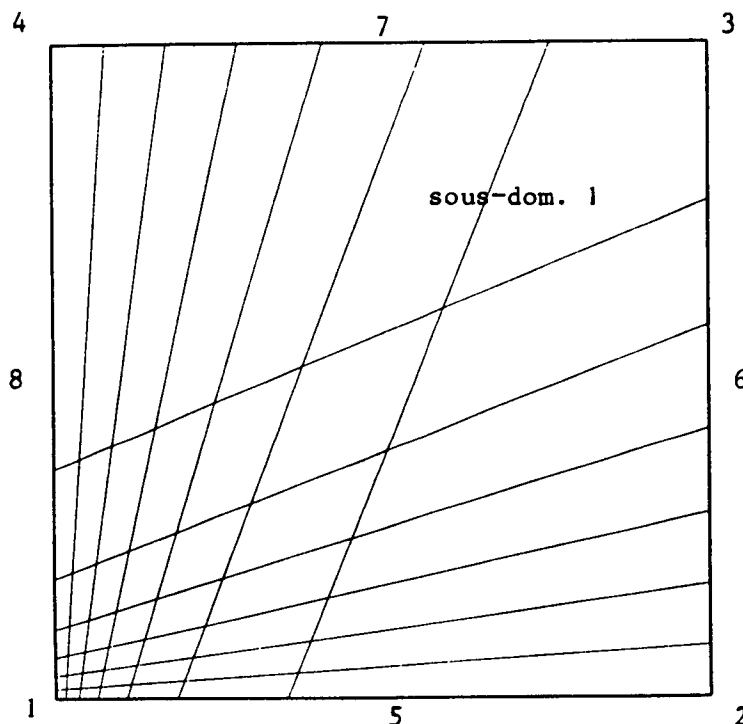


Fig. 2.2 : maillage en quadrangles avec 8 points par côté.
Les numéros désignent le sous-domaine et les références.

Le maillage en triangles s'obtient simplement en ajoutant une diagonale à chaque quadrangle. Comme le choix de la diagonale peut influencer le résultat des calculs, le choix effectué est celui indiqué sur la figure 2.3.

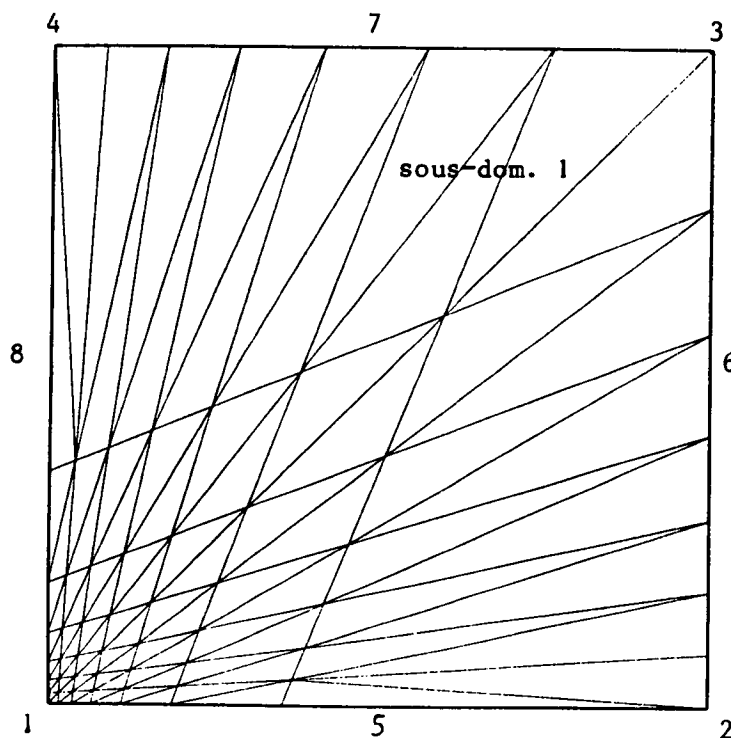


Fig. 2.3 : maillage en triangles avec 8 points par côté.
Les numéros désignent le sous-domaine et les références.

2.3. Spécification du problème

La surface du carré, ses côtés et ses sommets sont numérotés comme indiqué figures 2.2. et 2.3.

2.3.1. Sur la surface 1

La source de chaleur est donnée par :
$$-\Delta u(x,y) = \frac{-4}{(x+y+\epsilon)^3} = f^{\Omega}(x,y)$$

La conductivité est fixée arbitrairement : $k = 1$

2.3.2. Sur les lignes et les points

Afin de tester tous les cas classiques, des conditions de Dirichlet, de Fourier ou de Neumann sont données sur les côtés de référence 5 et 8 du carré. Pour que le problème soit toujours bien défini (éléments conformes ou non conformes), des conditions de Fourier sont toujours données sur les côtés de référence 6 et 7 du carré.

Calculons le flux normal sur chacun des côtés :

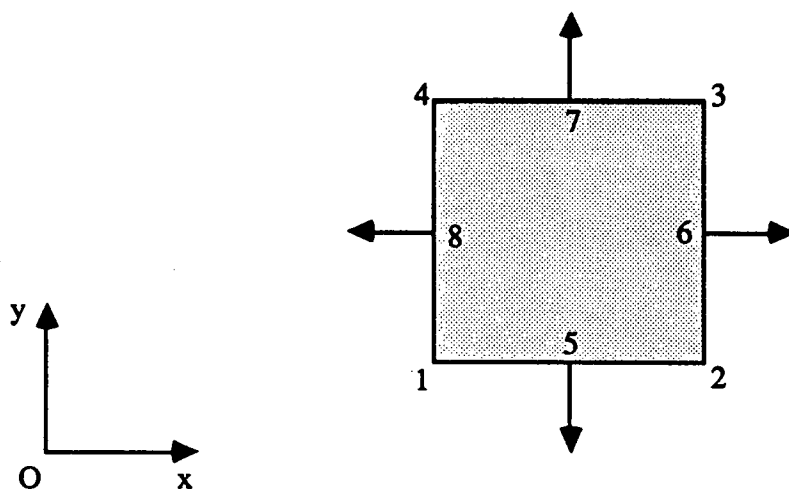


Fig. 2.4. : sens du flux normal

- sur le côté 5 :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

- sur le côté 6 :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

- sur le côté 7 :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

- sur le côté 8 :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

D'où les conditions aux limites :

- sur les côtés 6 et 7 :

$$\text{Fourier : } -k \frac{\partial u}{\partial n} = g(u - u_0) \Rightarrow u_0 = \frac{k}{g} \frac{\partial u}{\partial n} + u$$

avec $k = 1$ (conductivité)

$g = 1$ (coefficient de transfert)

$$u = \frac{1}{x+y+\varepsilon}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{-1}{(x+y+\varepsilon)^2}$$

- sur le sommet 3 : aucune condition

- sur les autres côtés et sommets :

Des conditions de Dirichlet, de Fourier ou de Neumann sont définies :

a) Dirichlet :

$$\text{Sur 1, 2, 4, 5, 8 : } \bar{u} = \frac{1}{x+y+\varepsilon}$$

b) Fourier :

Sur 1, 2, 4 : aucune condition

Sur 5, 8 : $g = 1$ coefficient de transfert

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{k}{g} \frac{\partial u}{\partial n} + u \quad (\text{cf côtés 6 et 7 ci-dessus}) \\ &= \frac{1}{(x+y+\varepsilon)^2} + \frac{1}{x+y+\varepsilon} \end{aligned}$$

c) Neumann :

sur 1, 2, 4 : aucune condition

$$\text{sur 5, 8 : } \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{(x+y+\varepsilon)^2}$$

Cas particulier de l'élément P3-Hermite TRIA2P3D

Cet élément a trois degrés de liberté sur chaque sommet : u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Les valeurs des dérivées partielles sont données de la façon suivante :

$$\text{Sur 3, 6, 7 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

a) Dirichlet avec dérivées tangentes imposées

La connaissance de u sur le bord entraîne celle de sa dérivée tangente.

$$\text{Sur 1 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

$$\text{Sur 2 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

$$\text{Sur 4 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

$$\text{Sur 5 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

$$\text{Sur 8 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

b) Dirichlet avec dérivées tangentes libres

$$\text{Idem avec } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre sur 5 et } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre sur 8}$$

c) Fourier

$$\text{Sur 1, 2, 4, 5, 8 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

d) Neumann avec dérivées normales imposées

$$\text{Sur 1 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

$$\text{Sur 2 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

$$\text{Sur 4 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

$$\text{Sur 5 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2}$$

$$\text{Sur 8 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y+\epsilon)^2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

e) Neumann avec dérivées normales libres

$$\text{Sur 1, 2, 4, 5, 8 : } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre}$$

Compte tenu de la difficulté à imposer une dérivée tangente ou normale nulle sur une frontière courbe, ce test a pour but d'examiner la sensibilité de la solution lorsque cette condition n'est pas imposée.

Attention, le sens du mot *imposé* est ici le suivant : une condition est *imposée* si le degré de liberté est fixé à la valeur imposée. La condition fait partie de l'espace des fonctions auquel appartient la solution. La condition est *libre* dans la mesure où elle est implicite de la formulation variationnelle.

En fait, dans les deux cas, la condition est vérifiée : explicitement si elle est *imposée*, implicitement si elle est *libre*.

2.4. Exécution avec DOMINO

Pour comparer équitablement les performances des différents éléments finis, les nombres totaux de degrés de liberté doivent être voisins. Pour cela, on choisit le plus petit nombre de points sur chaque côté du maillage tel que le nombre de degrés de liberté soit supérieur ou égal à 300.

Après avoir analysé le maillage réalisé, DOMINO demande de spécifier le problème physique. Si l'utilisateur appelait directement le code MODULEF, les conditions aux limites *explicit*es pour les éléments conformes deviendraient *implicit*es pour les éléments mixtes, et vice versa. Ce fait est totalement masqué par le système expert : les questions posées à l'utilisateur restent identiques dans les deux cas. En outre, le mécanisme de reprise permet d'exécuter très facilement de nombreuses sessions similaires.

Les listings ci-dessous sont obtenus à partir des sessions de l'élément P3-Hermite TRIA2P3D (cf paragraphe précédent) :

a) Dirichlet avec dérivées tangentes imposées

```
-- SURFACES 1 :  
  Traitement ?                materiau isotrope  
  Conductivite ?              1  
  Source de chaleur ?         -4 / (X+Y+EPS)**3  
-- POINTS 1 :  
  Type de condition ?         Dirichlet  
  Temperature imposee ?       +1 / (X+Y+EPS)  
  dub / dx ?                  -1 / (X+Y+EPS)**2  
  dub / dy ?                  -1 / (X+Y+EPS)**2  
-- POINTS 2 :  
  Type de condition ?         Dirichlet  
  Temperature imposee ?       +1 / (X+Y+EPS)  
  dub / dx ?                  -1 / (X+Y+EPS)**2  
  dub / dy ?                  \  
-- POINTS 3 :  
  Type de condition ?         Aucune  
  dub / dx ?                  \  
  dub / dy ?                  \  
-- POINTS 4 :  
  Type de condition ?         Dirichlet  
  Temperature imposee ?       +1 / (X+Y+EPS)  
  dub / dx ?                  \  
  dub / dy ?                  -1 / (X+Y+EPS)**2  
-- LIGNES 5 :  
  Type de condition ?         Dirichlet  
  Temperature imposee ?       +1 / (X+Y+EPS)  
-- POINTS 5 :  
  dub / dx ?                  -1 / (X+Y+EPS)**2  
  dub / dy ?                  \  
-- LIGNES 6 :  
  Type de condition ?         Fourier  
  Coefficient de transfert ?  1  
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
```

```

-- POINTS 6 :
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- LIGNES 7 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ?      1
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 7 :
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- LIGNES 8 :
  Type de condition ?      Dirichlet
  Temperature imposee ?      +1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 8 :
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      -1 / (X+Y+EPS)**2

```

b) Dirichlet avec dérivées tangentes libres

Idem avec $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \text{libre sur les points 5}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{libre sur les points 8}$.

c) Fourier

```

-- SURFACES 1 :
  Traitement ?      materiau isotrope
  Conductivite ?      1
  Source de chaleur ?      -4 / (X+Y+EPS)**3
-- POINTS 1 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- POINTS 2 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- POINTS 3 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- POINTS 4 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- LIGNES 5 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ?      1
  Temperature du fluide exterieur ? +1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 5 :
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \
-- LIGNES 6 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ?      1
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 6 :
  dub / dx ?      \
  dub / dy ?      \

```

```

-- LIGNES 7 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ? 1
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 7 :
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              \
-- LIGNES 8 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ? 1
  Temperature du fluide exterieur ? +1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 8 :
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              \

```

d) Neumann avec dérivées normales imposées

```

-- SURFACES 1 :
  Traitement ?             materiau isotrope
  Conductivite ?          1
  Source de chaleur ?      -4 / (X+Y+EPS)**3
-- POINTS 1 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
  dub / dy ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
-- POINTS 2 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
-- POINTS 3 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              \
-- POINTS 4 :
  Type de condition ?      Aucune
  dub / dx ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
  dub / dy ?              \
-- LIGNES 5 :
  Type de condition ?      Neumann
  Flux normal de chaleur ? +1 / (X+Y+EPS)**2
-- POINTS 5 :
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
-- LIGNES 6 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ? 1
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 6 :
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              \
-- LIGNES 7 :
  Type de condition ?      Fourier
  Coefficient de transfert ? 1
  Temperature du fluide exterieur ? -1 / (X+Y+EPS)**2 + 1 / (X+Y+EPS)
-- POINTS 7 :
  dub / dx ?              \
  dub / dy ?              \
-- LIGNES 8 :
  Type de condition ?      Neumann
  Flux normal de chaleur ? +1 / (X+Y+EPS)**2
-- POINTS 8 :
  dub / dx ?              -1 / (X+Y+EPS)**2
  dub / dy ?

```

e) Neumann avec dérivées normales libres

Idem avec $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ libres sur les points 1, 2, 4, 5, 8.

En fonction des données de l'utilisateur, DOMINO exécute automatiquement un enchaînement de processeurs MODULEF (George, 1987). Cette méthode est plus rapide que la création d'appels FORTRAN à des modules, puisqu'il faudrait alors compiler les programmes principaux générés et lancer des éditions de liens avec les bibliothèques MODULEF.

Les processeurs MODULEF demandent habituellement à l'utilisateur de créer manuellement des fichiers de données et des sous-programmes. Avec DOMINO, ces fichiers sont générés automatiquement, comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE DE SOUS-PROGRAMMES ET DE DONNEES GENERES PAR DOMINO

Le cas présenté ci-dessous correspond à l'élément TRIA2P3D avec conditions de Dirichlet et dérivées tangentes imposées (cf pages suivantes).

- Exemple de sous-programme généré par DOMINO : SPUTTH

Définition des caractéristiques physiques des matériaux et des sollicitations externes :

```
SUBROUTINE SPUTTH(MOTCLE,NOREF,X,Y,Z,LVAL,VAL)
CHARACTER*(*) MOTCLE
REAL VAL(LVAL)
PARAMETER (EPS = 0.1)

C
C 'COND' : SURFACES
  IF (MOTCLE.EQ.'COND') THEN
    IF (NOREF.EQ.1) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = 1
    ELSE
      GOTO 900
    END IF
C
C 'ECHA' : LIGNES
  ELSE IF (MOTCLE.EQ.'ECHA') THEN
    IF (NOREF.EQ.6) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = 1
    ELSE IF (NOREF.EQ.7) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = 1
    ELSE
      GOTO 900
    END IF
C
C 'FLUX' : LIGNES
  ELSE IF (MOTCLE.EQ.'FLUX') THEN
    IF (NOREF.EQ.6) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = (1) * (-1./(X+Y+EPS)**2 + 1./(X+Y+EPS))
    ELSE IF (NOREF.EQ.7) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = (1) * (-1./(X+Y+EPS)**2 + 1./(X+Y+EPS))
    ELSE
      GOTO 900
    END IF
C
C 'SOUR' : SURFACES
  ELSE IF (MOTCLE.EQ.'SOUR') THEN
    IF (NOREF.EQ.1) THEN
      IF (LVAL.NE.1) GOTO 900
      VAL(1) = -4. / (X+Y+EPS)**3
    ELSE
      GOTO 900
    END IF
C
C AUTRE MOT CLE
  ELSE
    GOTO 900
  END IF
C
C RETOUR NORMAL OU ERREUR
  RETURN
900 WRITE (*,*) '** SPUTTH : ',MOTCLE,NOREF,X,Y,Z,LVAL
  ZERO = 0.
  PLANTE = 1. / ZERO
  STOP
  END
```


- Exemple de sous-programme généré par DOMINO : VALCLR

Conditions aux limites imposées :

- pour les éléments "conformes", VALCLR = température (et dérivée tangente pour l'élément P3).

- pour les éléments "mixtes", VALCLR = flux normal .

Selon le type de l'élément fini, le système expert fixe l'une ou l'autre de ces conditions.

```
FUNCTION VALCLR(NOREF,X,Y,Z)
CHARACTER*5 MOTCLE
PARAMETER (MOTCLE='VALCL', LVAL=1)
PARAMETER (EPS = 0.1)
C
C BRANCHEMENT
GOTO (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11),NOREF
WRITE (*,*) '** VALCLR : NOREF =', NOREF
ZERO = 0.
PLANTE = 1. / ZERO
STOP
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 1 1 VN
1 VALCLR = +1 / (X+Y+EPS)
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 1 1 DX
2 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 1 1 DY
3 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 2 1 VN
4 VALCLR = +1 / (X+Y+EPS)
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 2 1 DX
5 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 4 1 VN
6 VALCLR = +1 / (X+Y+EPS)
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 4 1 DY
7 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 5 1 VN
8 VALCLR = +1 / (X+Y+EPS)
RETURN
C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 5 1 DX
9 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
```

```

C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 8 1 VN
10 VALCLR = +1 / (X+Y+EPS)
RETURN

C
C REF. INCONNUE_VAR. MNEMONIQUE : 8 1 DY
11 VALCLR = -1 / (X+Y+EPS)**2
RETURN
END

```

- Exemple de données générées par DOMINO
(pour l'exécution des processeurs gibbxx, comaxx, fomixx, ...)

```

-- gibbxx
0  -- IMPRESSION
'a10.nopo'  -- SDE
'demo.nopo'  -- SDS
1  -- NOEUDS ET ELEMENTS

-- comaxx
0  -- 0 FONCTION INTERPRETEE
2  -- NDIM
1  -- NDSD
0  -- NBSDC
8  -- NNR
0  -- NBLC
'THER'  -- NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
1  'TRIA'  '2P3D'
1  'TRIA'  '2P3D'
'demo.nopo' 0  -- SDE
'demo.mail' 0  -- SDS
'demo.coor' 0  -- SDS
0  -- NTMAIL
0  -- NTCOOR

-- fomixx
'CARRE'
'demo.forc' 0 0  -- SDS (NOM, NIVEAU, TABLEAUX ASSOCIES)
'demo.mili' 0 0  -- SDS (NOM, NIVEAU, TABLEAUX ASSOCIES)

-- DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC
1  -- NDSM
0 1 2 0  -- LOTS      : VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS
0 0 0 0  -- ELEMENTS : VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS = 0
-- NUMERO_SD_REF NFRO=0 NOPT=NOTEL ITRAIT=3 LOPT=0 IADR=0 :
-- SURFACES :
1 0 20 3 0 0
-- LIGNES :
6 0 20 3 0 0
7 0 20 3 0 0
-- POINTS :

-- DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI
0 1 2 0  -- LOTS      : VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS
0 0 0 0  -- ELEMENTS : VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS = 0
-- NUMERO_SD_REF NFRO=0 NOPT=NOTEL ITRAIT=3 LOPT=0 IADR=0 :
-- SURFACES :
1 0 20 3 0 0
-- LIGNES :
6 0 20 3 0 0
7 0 20 3 0 0
-- POINTS :

```

```

-- thelxx
'demo.mail' 0 -- SDE
'demo.coor' 0 -- SDE
'demo.tae' 0 0 -- SDS
1 -- 1 SI POBA EST UTILISEE
'//hl/udd/laug/inria/modulef/poba.direct'
1 -- 1 SI MILI EST UTILISEE
'demo.mili' 0 -- SDE
1 -- 1 SI FORC EST UTILISEE
'demo.forc' 0 -- SDE
1 -- NPROV : 1 THERMIQUE, 2 ELASTICITE

0 -- IOPT(1) : MASSE (0 NON EVOLUTIF)
1 -- IOPT(2) : RIGIDITE
1 -- IOPT(3) : SECOND MEMBRE
0 -- IOPT(4) : REMONTEE
:RIE 0 -- NOM DU TABLEAU DES CL ET NOMBRE DE CL

-- cobdxx
'demo.mail' 0 -- SDE
'demo.bdcl' 0 0 -- SDS
2 -- ICONST : 2 ==> VALEURS DE BLOCAGES DONNEES PAR FONCTION
11 -- NBFR
2 -- NTYP

-- REFERENCE INCONNUE_VARIATIONNELLE MNEMONIQUE -- VALEUR
1 1 VN -- +1 / (X+Y+EPS)
1 1 DX -- -1 / (X+Y+EPS)**2
1 1 DY -- -1 / (X+Y+EPS)**2
2 1 VN -- +1 / (X+Y+EPS)
2 1 DX -- +1 / (X+Y+EPS)**2
4 1 VN -- +1 / (X+Y+EPS)
4 1 DY -- -1 / (X+Y+EPS)**2
5 1 VN -- +1 / (X+Y+EPS)
5 1 DX -- -1 / (X+Y+EPS)**2
8 1 VN -- +1 / (X+Y+EPS)
8 1 DY -- -1 / (X+Y+EPS)**2
0 -- ABSENCE DE FONCTIONS INTERPRETEES
'demo.coor' 0 -- SDE
1 -- 1 SI APPEL DE CORNOE (PEU COUTEUX)
0 -- ABSENCE DE SD NDL1
0 -- ABSENCE DE CONDITIONS EN RELATION LINEAIRE

-- cholxx
'demo.mail' 0 -- SDE
1 -- NDSM
2 -- NTYP
3 -- NB DE DL PAR NOEUD
'demo.tae' 0 -- SDE
1 -- 1 SI BDCL
'demo.bdcl' 0 -- SDE
0 -- 1 SI R.L.
'demo.b' 0 -- SDS
0 -- IMPRESSION SOLUTION

```

```
-- trmcxx
5 0 2 -- Terminal Apollo
'demo.mail'
'demo.coor'
10
2
'demo.b'
50 3 -- FRONTIERE REFERENCEE
72 1 -- REMPLISSAGE
0
!LIRE '-errin'
```

Lorsque c'est possible, DOMINO active des processeurs de visualisation, par exemple pour les températures et les flux (figures 2.6 à 2.9). Ces températures sont représentées ici par des lignes isothermes, et les flux par des flèches normales aux arêtes, de longueur proportionnelle à la norme du flux :

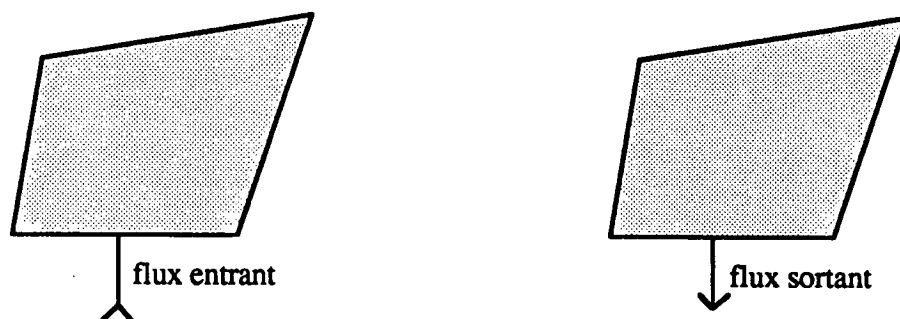


Fig. 2.5 : représentation d'un flux sur l'arête d'un élément.

En comparant les flux entrant et sortant par une arête commune à deux éléments, on peut constater des différences fig. 2.7. Ceci est dû au fait que les éléments conformes, qui assurent la continuité de la température, n'assurent pas celle du flux normal.

Inversement, des lignes isothermes discontinues apparaissent fig. 2.8. En effet, les éléments mixtes assurent la continuité du flux normal et non celle de la température.

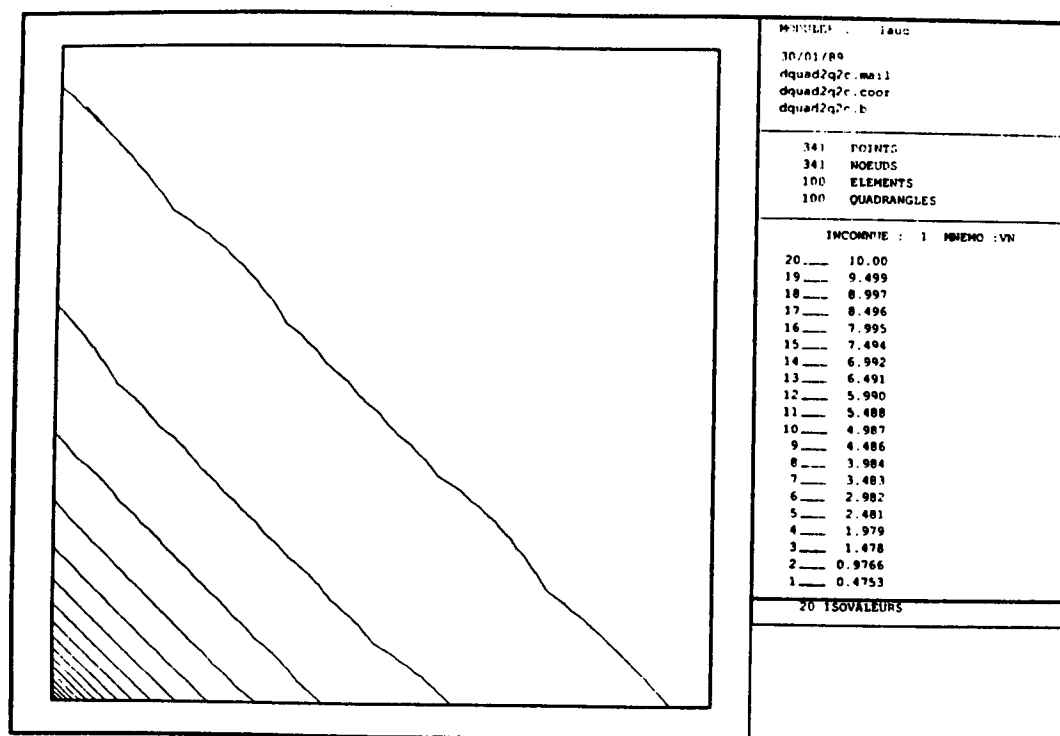


Fig. 2.6 : élément "conforme" QUAD2Q2C ; conditions de Dirichlet ; températures.

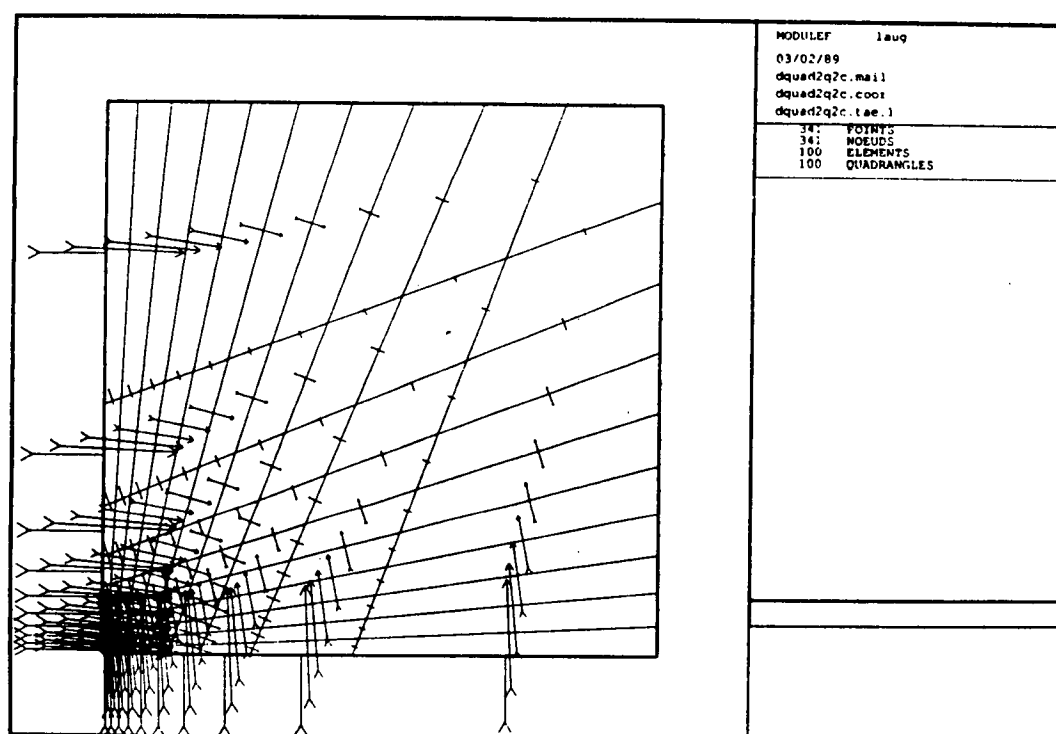


Fig. 2.7 : élément "conforme" QUAD2Q2C ; conditions de Dirichlet ; flux.

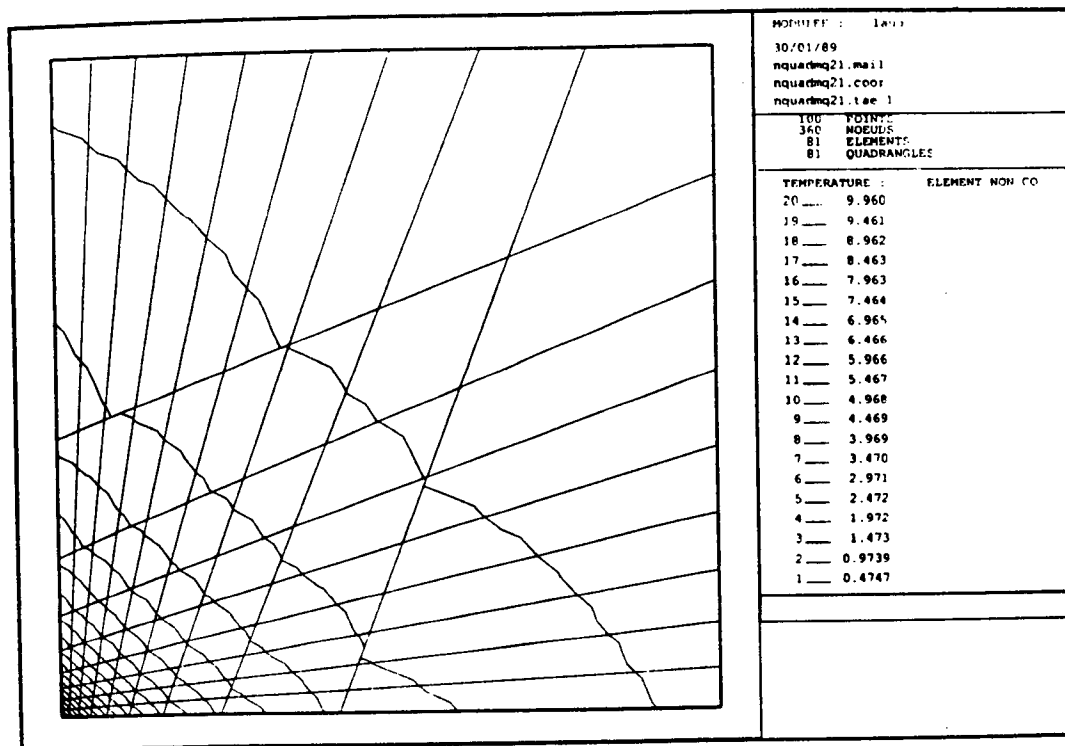


Fig. 2.8 : élément "mixte" QUADM21 ; conditions de Neumann ; températures.

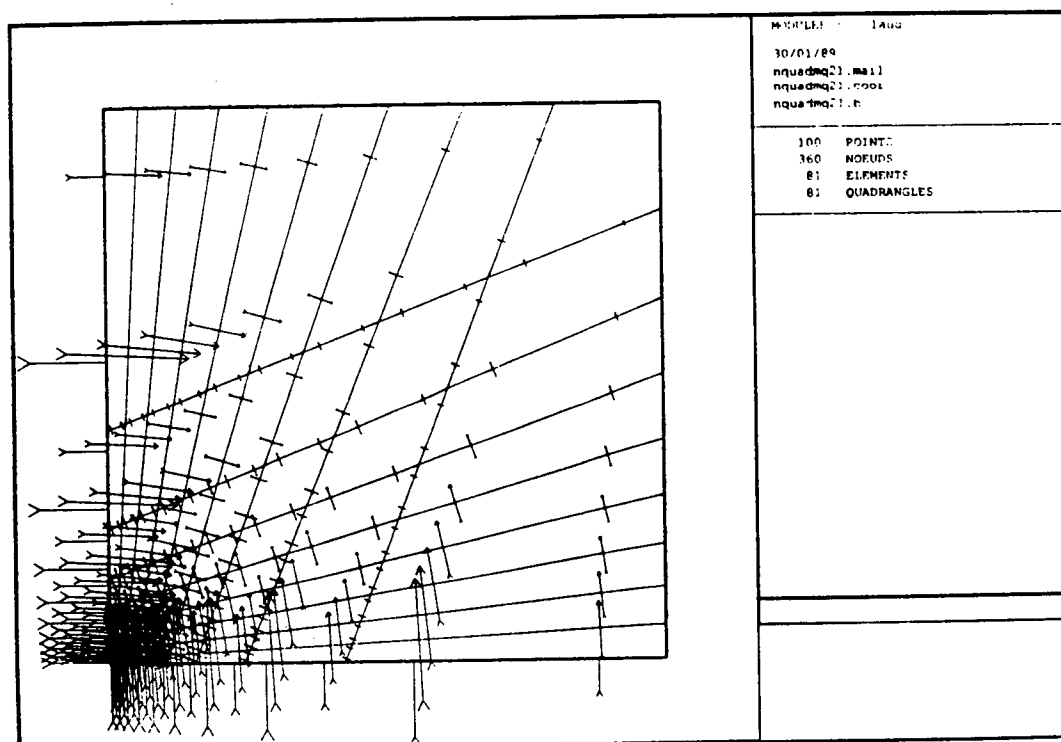


Fig. 2.9 : élément "mixte" QUADM21 ; conditions de Neumann ; flux.

2.5. Comparaison des éléments

Les principaux résultats sont présentés dans les paragraphes suivants :

- précision des températures,
- précision des flux,
- autres critères.

2.5.1. Précision des températures

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

DFN	ELEMENT	ERL2	ERL1	EN	X	Y	UC	UE	UC-UE
D	QUAD2Q1D	0.002	0.004	N	0.417	0.469	1.037	1.014	0.024
D	QUAD2Q2C	0.000	0.001	N	0.191	0.522	1.236	1.230	0.005
D	QUAD2Q2D	0.001	0.001	N	0.179	0.490	1.306	1.299	0.007
D	QUADMQ10	0.001	0.002	E	0.906	0.906	1.191	1.199	-0.009
D	QUADMQ21	0.001	0.001	E	0.939	0.828	1.682	1.691	-0.009
D	TRI2TEQ2	0.021	0.032	N	0.490	0.000	1.496	1.696	-0.200
D	TRI2THD2	0.002	0.004	N	1.000	0.295	0.736	0.717	0.019
D	TRIA2P1D	0.002	0.004	N	0.469	0.417	1.034	1.014	0.020
D	TRIA2P2C	0.001	0.002	N	0.479	0.150	1.383	1.372	0.011
D	TRIA2P2D	0.001	0.001	N	0.179	0.490	1.309	1.299	0.010
DI	TRIA2P3D	0.001	0.003	N	0.033	0.434	1.748	1.764	-0.016
DL	TRIA2P3D	0.003	0.008	N	0.033	0.434	1.733	1.764	-0.031
D	TRIAMT10	0.002	0.004	E	0.029	0.821	1.958	1.988	-0.030
D	TRIAMT21	0.015	0.022	E	0.060	0.684	1.795	2.082	-0.286
F	QUAD2Q1D	0.082	0.113	N	0.000	0.000	9.490	10.000	-0.510
F	QUAD2Q2C	0.026	0.031	N	0.000	0.000	9.789	10.000	-0.211
F	QUAD2Q2D	0.005	0.007	N	0.000	0.421	1.965	1.919	0.046
F	QUADMQ10	0.015	0.020	E	0.906	0.906	9.314	9.229	0.086
F	QUADMQ21	0.001	0.002	E	0.954	0.954	1.923	1.934	-0.010
F	TRI2TEQ2	0.014	0.020	N	0.008	0.356	2.006	2.153	-0.147
F	TRI2THD2	0.003	0.007	N	1.000	0.000	0.948	0.909	0.039
F	TRIA2P1D	0.125	0.174	N	0.000	0.000	9.223	10.000	-0.777
F	TRIA2P2C	0.001	0.003	N	0.000	1.000	0.926	0.909	0.017
F	TRIA2P2D	0.079	0.113	N	0.000	0.000	9.520	10.000	-0.480
F	TRIA2P3D	0.001	0.001	N	0.000	0.421	1.911	1.919	-0.008
F	TRIAMT10	0.033	0.047	E	0.029	0.821	9.238	9.065	0.173
F	TRIAMT21	0.021	0.027	E	0.060	0.684	1.760	2.082	-0.322
N	QUAD2Q1D	0.202	0.312	N	0.000	0.000	8.888	10.000	-1.112
N	QUAD2Q2C	0.058	0.085	N	0.000	0.000	9.624	10.000	-0.376
N	QUAD2Q2D	0.012	0.018	N	0.000	0.421	1.994	1.919	0.075
N	QUADMQ10	0.041	0.063	E	0.906	0.906	9.437	9.229	0.208
N	QUADMQ21	0.001	0.002	E	0.773	0.773	1.541	1.530	0.011
N	TRI2TEQ2	0.035	0.056	N	0.008	0.356	1.925	2.153	-0.227
N	TRI2THD2	0.005	0.008	N	0.000	1.000	0.944	0.909	0.035
N	TRIA2P1D	0.317	0.493	N	0.000	0.000	8.268	10.000	-1.732
N	TRIA2P2C	0.002	0.003	N	0.000	1.000	0.926	0.909	0.017
N	TRIA2P2D	0.184	0.289	N	0.000	0.000	9.006	10.000	-0.994
NI	TRIA2P3D	0.001	0.002	N	0.000	0.421	1.912	1.919	-0.007
NL	TRIA2P3D	0.001	0.002	N	0.000	0.421	1.912	1.919	-0.007
N	TRIAMT10	0.094	0.146	E	0.029	0.821	9.520	9.065	0.455
N	TRIAMT21	0.040	0.056	E	0.060	0.684	1.682	2.082	-0.399

avec :

DFN : D=DIRICHLET, F=FOURIER, N=NEUMANN
 POUR TRIA2P3D : I=DERIVEES IMPOSEES, L=DERIVEES LIBRES
 ELEMENT : NOM DE L'ELEMENT
 ERL2 : ERREUR RELATIVE L2 SUR LA TEMPERATURE
 ERL1 : ERREUR RELATIVE L1 SUR LA TEMPERATURE
 EN : E=ELEMENT, N=NOEUD OÙ SE TROUVE LA PLUS GRANDE ERREUR ABSOLUE
 X,Y : COORDONNEES OÙ SE TROUVE LA PLUS GRANDE ERREUR ABSOLUE
 UC : TEMPERATURE CALCULEE
 UE : TEMPERATURE EXACTE = 1/(X+Y+0.1)

Un bon critère de comparaison est l'erreur relative L^2 définie par :

$$ERL2 = \sqrt{\frac{\sum_{\text{nœuds}} |u - u_h|^2}{\sum_{\text{nœuds}} |u|^2}}$$

avec $u(\text{nœud})$ solution exacte et $u_h(\text{nœud})$ solution calculée.

Les histogrammes ci-dessous représentent ce critère dans les trois cas étudiés : Dirichlet, Fourier et Neumann. Rappelons que les comparaisons sont effectuées à nombre de degrés de liberté sensiblement constant (pour plus de détails, voir § 2.5.3).

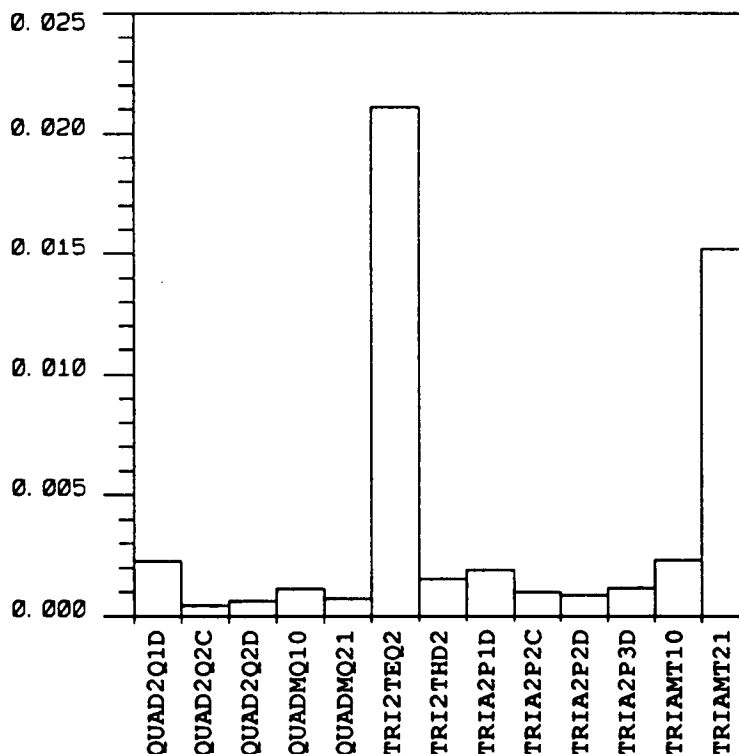


Fig. 2.10 : erreur relative L^2 obtenue avec des conditions de Dirichlet.

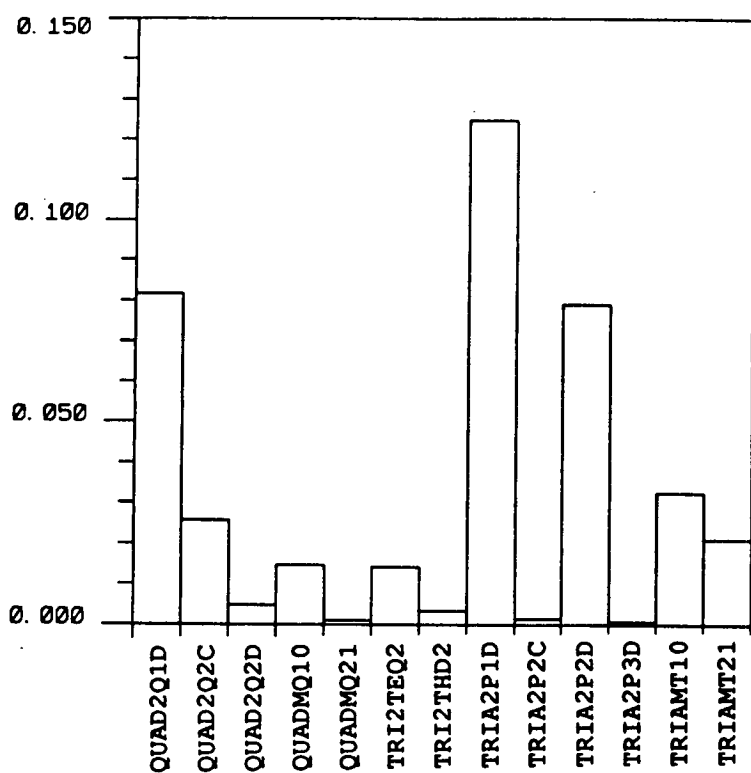


Fig. 2.11 : erreur relative L^2 obtenue avec des conditions de Fourier.

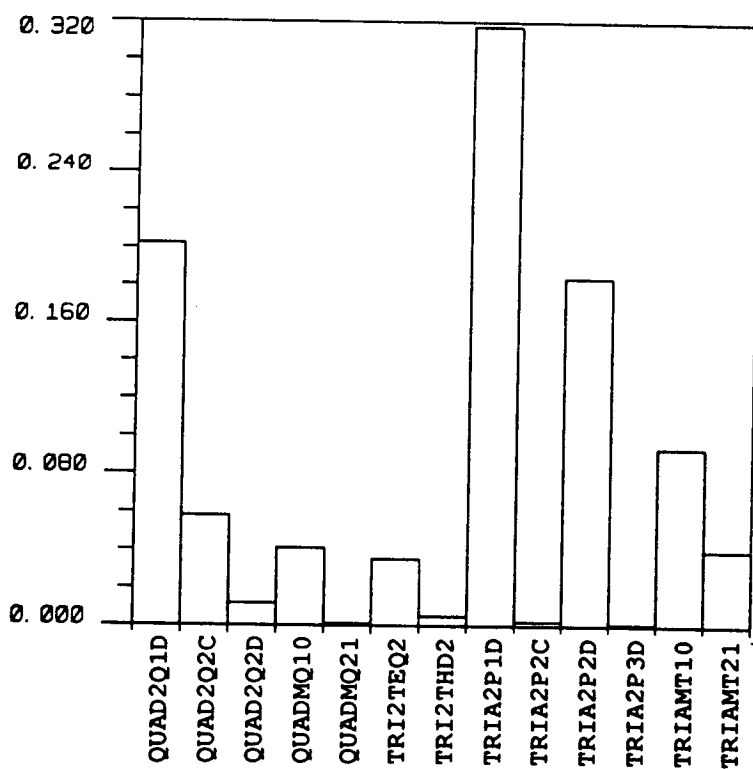


Fig. 2.12 : erreur relative L^2 obtenue avec des conditions de Neumann.

Remarques sur la précision pour les conditions de Fourier

1. Dans l'ensemble, à nombre total de degrés de liberté constant, la précision croît avec le degré de l'interpolation.
2. TRIA2P2D donne des résultats décevants. Ils sont dus à la formule d'intégration numérique qui fait seulement intervenir les milieux des 3 arêtes. Celle de TRIA2P2C employant les sommets et les milieux est plus précise.
3. TRIA2P1D donne les plus mauvais résultats.
4. La précision des éléments mixtes est très bonne en température, bien que cette inconnue ne soit pas continue.
5. Les plus performants sont QUADMQ21, TRIA2P2C et TRIA2P3D.
6. L'erreur relative peut être ordonnée comme suit :
$$\text{TRIA2P3D} \approx \text{TRIA2P2C} \approx \text{QUADMQ21} < \text{TRI2THD2} < \text{QUAD2Q2D} < \text{TRI2TEQ2} < \text{QUADMQ10} < \text{TRIAMT21} < \text{QUAD2Q2C} < \text{TRIAMT10} < \text{TRIA2P2D} < \text{QUAD2Q1D} < \text{TRIA2P1D}$$

Remarques sur la précision des différentes conditions aux limites

En résumé :

précision NEUMANN < précision FOURIER < précision DIRICHLET

pour tous les éléments sauf TRI2TEQ2 et TRIAMT21 qui éprouvent quelques "faiblesses" pour les conditions de DIRICHLET.

2.5.2. Précision des flux

Il est difficile d'exprimer l'expression analytique des flux en chaque point, car celle-ci dépend de la longueur de l'arête. Le critère de comparaison retenu a donc été la valeur du flux calculé au nœud le plus proche de l'origine, où se trouvent les valeurs maximales:

DFN	ELEMENT	EN	X	Y	FLUX	FLUXC	FLUXE	%
D	QUAD2Q1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.506	89.576	94.581	-5.292
D	QUAD2Q2C	E	5.000E-3	0.000E0	0.903	90.308	90.703	-0.435
D	QUAD2Q2D	E	5.618E-3	0.000E0	1.002	89.144	89.645	-0.558
D	QUADMQ10	N	4.098E-3	0.000E0	0.755	92.062	92.281	-0.238
D	QUADMQ21	N	2.374E-3	0.000E0	1.072	95.376	95.415	-0.041
D	TRI2TEQ2	*	*	*	*	*	*	*
D	TRI2THD2	*	*	*	*	*	*	*
D	TRIA2P1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.479	84.716	94.581	-10.430
D	TRIA2P2C	E	5.618E-3	0.000E0	0.993	88.394	89.645	-1.395
D	TRIA2P2D	E	5.618E-3	0.000E0	0.993	88.386	89.645	-1.404
DI	TRIA2P3D	N	11.236E-3	0.000E0	80.494	80.494	80.818	-0.401
DL	TRIA2P3D	N	11.236E-3	0.000E0	80.494	73.322	80.818	-9.275
D	TRIAMT10	N	5.000E-3	0.000E0	0.905	90.451	90.703	-0.278
D	TRIAMT21	N	3.154E-3	0.000E0	1.403	94.021	93.978	0.046
F	QUAD2Q1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.486	86.077	94.581	-8.991
F	QUAD2Q2C	E	5.000E-3	0.000E0	0.888	88.841	90.703	-2.053
F	QUAD2Q2D	E	5.618E-3	0.000E0	1.000	88.989	89.645	-0.731
F	QUADMQ10	N	4.098E-3	0.000E0	0.756	92.200	92.281	-0.088
F	QUADMQ21	N	2.374E-3	0.000E0	1.072	95.417	95.415	0.002
F	TRI2TEQ2	*	*	*	*	*	*	*
F	TRI2THD2	*	*	*	*	*	*	*
F	TRIA2P1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.465	82.325	94.581	-12.958
F	TRIA2P2C	E	5.618E-3	0.000E0	0.993	88.387	89.645	-1.403
F	TRIA2P2D	E	5.618E-3	0.000E0	0.974	86.728	89.645	-3.254
F	TRIA2P3D	N	11.236E-3	0.000E0	80.722	80.722	80.818	-0.120
F	TRIAMT10	N	5.000E-3	0.000E0	0.905	90.535	90.703	-0.185
F	TRIAMT21	N	3.154E-3	0.000E0	1.403	94.033	93.978	0.059
N	QUAD2Q1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.484	85.650	94.581	-9.442
N	QUAD2Q2C	E	5.000E-3	0.000E0	0.887	88.731	90.703	-2.175
N	QUAD2Q2D	E	5.618E-3	0.000E0	1.000	89.006	89.645	-0.712
N	QUADMQ10	N	4.098E-3	0.000E0	0.756	92.281	92.281	0.000
N	QUADMQ21	N	2.374E-3	0.000E0	1.072	95.415	95.415	0.000
N	TRI2TEQ2	*	*	*	*	*	*	*
N	TRI2THD2	*	*	*	*	*	*	*
N	TRIA2P1D	E	2.825E-3	0.000E0	0.461	81.621	94.581	-13.703
N	TRIA2P2C	E	5.618E-3	0.000E0	0.993	88.379	89.645	-1.411
N	TRIA2P2D	E	5.618E-3	0.000E0	0.971	86.392	89.645	-3.628
NI	TRIA2P3D	N	11.236E-3	0.000E0	80.818	80.818	80.818	0.000
NL	TRIA2P3D	N	11.236E-3	0.000E0	80.719	80.719	80.818	-0.123
N	TRIAMT10	N	5.000E-3	0.000E0	0.907	90.703	90.703	0.000
N	TRIAMT21	N	3.154E-3	0.000E0	1.403	93.978	93.978	0.000

avec :

DFN : D=DIRICHLET, F=FOURIER, N=NEUMANN
POUR TRIA2P3D : I=DERIVEES IMPOSEES, L=DERIVEES LIBRES
ELEMENT : NOM DE L'ELEMENT
EN : E=ELEMENT, N=NOEUD OU EST CALCULE LE FLUX
X, Y : COORDONNEES OU EST CALCULE LE FLUX
FLUX : FLUX DONNE PAR L'ELEMENT
FLUXC : FLUX/H, AVEC H = MESURE DE L'ARETE
FLUXE : FLUX EXACT = $1 / (X+0.1)**2$
% : POURCENTAGE = $100 * (FLUXC-FLUXE) / FLUXE$

Ces résultats sont illustrés par les histogrammes ci-dessous.

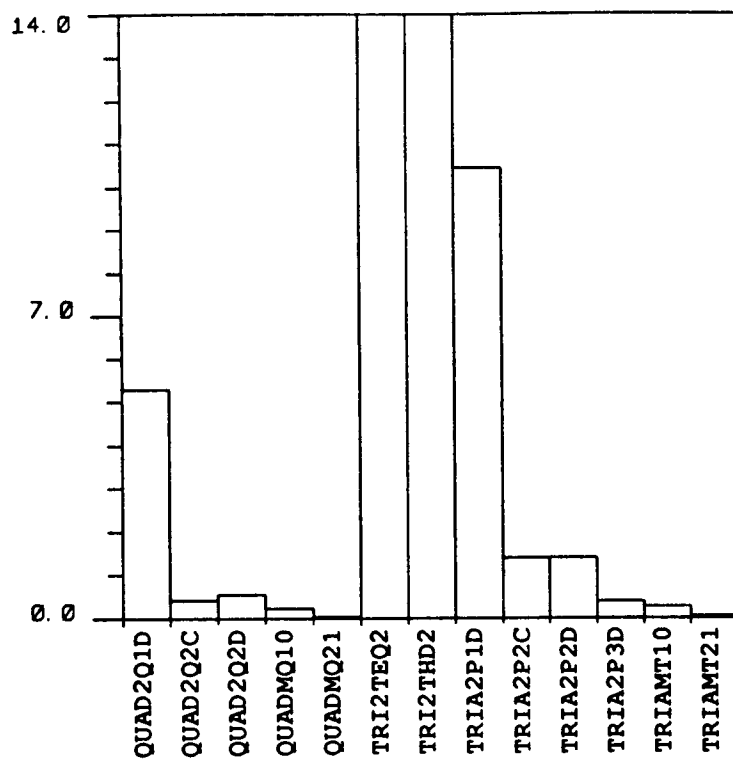


Fig. 2.13 : pourcentage d'erreur sur les flux obtenu avec des conditions de Dirichlet.

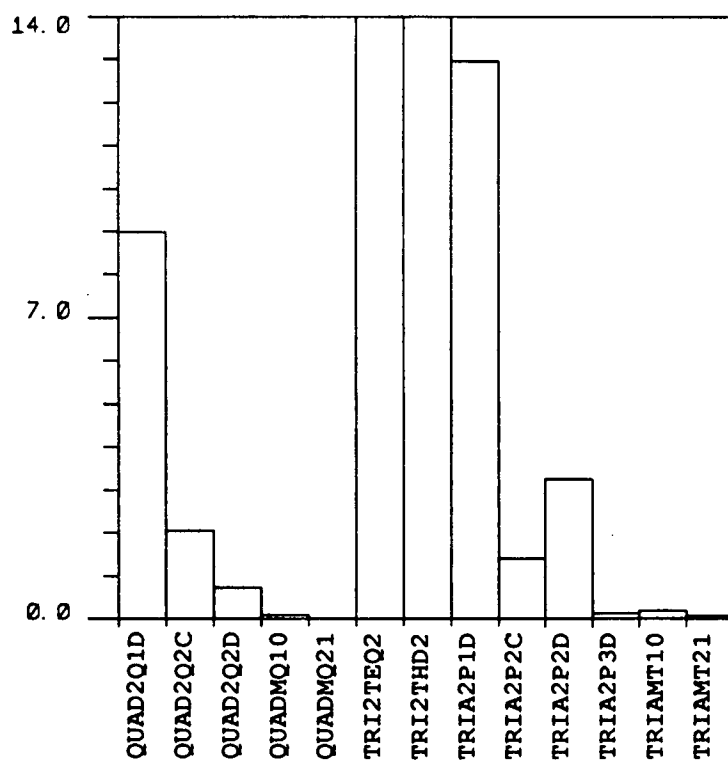


Fig. 2.14 : pourcentage d'erreur sur les flux obtenu avec des conditions de Fourier.

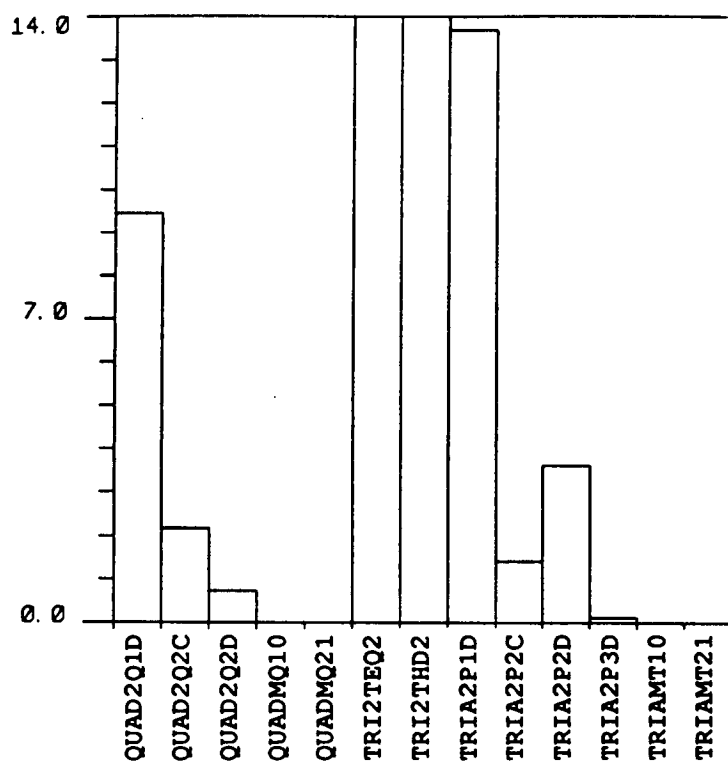


Fig. 2.15 : pourcentage d'erreur sur les flux obtenu avec des conditions de Neumann.

Remarques sur la précision des flux normaux

1. Pour les éléments TRI2TEQ2 et TRI2THD2, les valeurs obtenues après remontée ne représentent pas des flux.
2. Les éléments mixtes et TRIA2P3D donnent les meilleurs résultats.
3. Pour les éléments finis mixtes, les conditions de NEUMANN consistent à imposer les flux normaux sur la frontière *explicitement* et non *implicitement* dans la formulation variationnelle.
4. Dans l'ensemble, la précision du flux normal est décroissante selon les conditions aux limites DIRICHLET, FOURIER ou NEUMANN.
5. Les éléments de type LAGRANGE n'offrent pas une bonne précision des flux normaux.
6. L'erreur relative peut être ordonnée comme suit :

$$\text{QUADMQ21} < \text{TRIAMT21} < \text{QUADMQ10} < \text{TRIA2P3D} < \text{TRIAMT10} < \text{QUAD2Q2D} < \text{TRIA2P2C} < \text{QUAD2Q2C} < \text{TRIA2P2D} < \text{QUAD2Q1D} < \text{TRIA2P1D}$$

2.5.3. Autres critères de comparaison

DFN	ELEMENT	NEL	NNO	NDL	LMAT	DN3000	DN590T
D	QUAD2Q1D	289	324	324	6138	10.2	5.0
D	QUAD2Q2C	100	341	341	9314	11.9	5.6
D	QUAD2Q2D	81	361	361	10403	13.0	5.6
D	QUADMQ10	144	312	312	5477*2	5.7	3.0
D	QUADMQ21	81	360	360	9556*2	9.5	4.1
D	TRI2TEQ2	98	322	322	5159	6.6	3.3
D	TRI2THD2	162	361	361	7679	10.6	4.9
D	TRIA2P1D	578	324	324	4370	12.1	6.1
D	TRIA2P2C	162	361	361	7679	10.3	5.0
D	TRIA2P2D	162	361	361	7679	10.0	5.0
DI	TRIA2P3D	162	100	300	7026	9.8	4.6
DL	TRIA2P3D	162	100	300	7026	9.5	4.8
D	TRIAMT10	200	320	320	3586*2	4.9	2.7
D	TRIAMT21	98	322	322	5159*2	6.0	2.7
F	QUAD2Q1D	289	324	324	6138	9.5	4.9
F	QUAD2Q2C	100	341	341	9314	11.6	5.2
F	QUAD2Q2D	81	361	361	10403	12.8	5.3
F	QUADMQ10	144	312	312	5477*2	5.7	3.0
F	QUADMQ21	81	360	360	9556*2	9.4	4.2
F	TRI2TEQ2	98	322	322	5159	6.3	3.0
F	TRI2THD2	162	361	361	7679	10.3	4.7
F	TRIA2P1D	578	324	324	4370	11.1	5.8
F	TRIA2P2C	162	361	361	7679	9.9	4.5
F	TRIA2P2D	162	361	361	7679	9.8	4.6
F	TRIA2P3D	162	100	300	7026	9.2	4.1
F	TRIAMT10	200	320	320	3586*2	4.8	2.6
F	TRIAMT21	98	322	322	5159*2	5.4	2.4
N	QUAD2Q1D	289	324	324	6138	9.4	4.8
N	QUAD2Q2C	100	341	341	9314	11.6	5.2
N	QUAD2Q2D	81	361	361	10403	12.8	5.3
N	QUADMQ10	144	312	312	5477*2	5.9	3.2
N	QUADMQ21	81	360	360	9556*2	9.6	4.4
N	TRI2TEQ2	98	322	322	5159	6.2	3.1
N	TRI2THD2	162	361	361	7679	10.1	4.6
N	TRIA2P1D	578	324	324	4370	11.5	5.7
N	TRIA2P2C	162	361	361	7679	9.9	4.6
N	TRIA2P2D	162	361	361	7679	9.6	4.6
NI	TRIA2P3D	162	100	300	7026	9.3	4.5
NL	TRIA2P3D	162	100	300	7026	9.2	4.3
N	TRIAMT10	200	320	320	3586*2	5.0	2.9
N	TRIAMT21	98	322	322	5159*2	5.7	3.0

avec :

DFN : D=DIRICHLET, F=FOURIER, N=NEUMANN
POUR TRIA2P3D : I=DERIVEES IMPOSEES, L=DERIVEES LIBRES
ELEMENT : NOM DE L'ELEMENT
NEL : NOMBRE D'ELEMENTS
NNO : NOMBRE DE NOEUDS
NDL : NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE
LMAT : TAILLE DE LA MATRICE PROFIL (NOMBRE DE MOTS)
DN3000 : TEMPS CPU SUR APOLLO DN3000
DN590T : TEMPS CPU SUR APOLLO DN590T

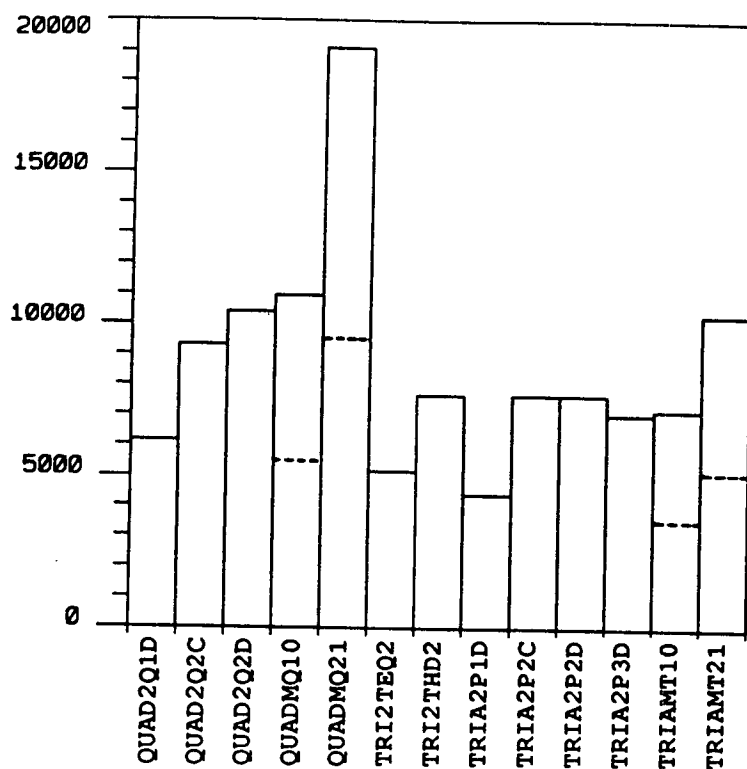


Fig. 2.16 : taille de la matrice profil, en nombre de mots.
 N.B. Les éléments finis mixtes sont programmés en double précision.

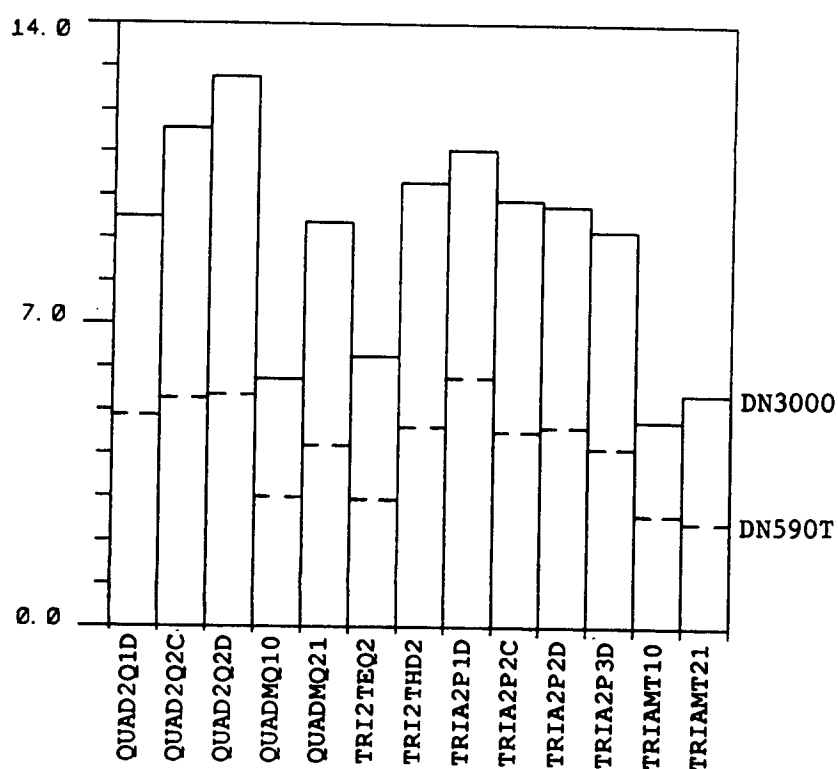


Fig. 2.17 : temps CPU sur Apollo DN3000 et DN590T (conditions de Fourier).

Remarques sur la taille de la matrice PROFIL

1. Le nombre de variables de la matrice profil est indépendant des conditions aux limites, compte tenu du mode de leur prise en compte (cf brochure MODULEF n° 21 sur le stockage profil).
2. Les éléments finis mixtes sont programmés avec des réels double précision, ce qui explique le pic obtenu pour QUADMQ21 qui divisé par 2 se retrouve au niveau des autres éléments finis de degré 2 ou 3. C'est pourquoi le tableau comprend le nombre de variables et non le nombre de mots.
3. Les éléments de degré faible (QUAD2Q1D, TRIA2P1D, QUADMQ10, TRIAMT10) et TRI2TEQ2, TRIAMT21 ont une matrice profil de taille environ la moitié de celle des éléments de degré plus élevé (QUAD2Q2C, QUAD2Q2D, QUADMQ21, TRI2THD2, TRIA2P2C, TRIA2P2D, TRIA2P3D, TRIAMT21).
4. Avec le même type d'interpolation Lagrange ou mixte, la matrice profil des triangles est moins volumineuse que celle des quadrangles.
5. La différence de taille des matrices QUAD2Q2C et QUAD2Q2D s'explique par le fait que le premier élément a 8 nœuds et le second 9 nœuds.
6. Les différences de taille de la matrice s'expliquent par le nombre et la position des nœuds. Les coefficients non nuls de la ligne associée à un nœud sont liés aux nœuds des éléments comprenant ce nœud. Par exemple, un sommet peut appartenir jusqu'à une petite dizaine d'éléments tandis qu'un nœud sur une arête appartient au plus à 2 éléments.
7. En bref, rapportée au nombre de variables (divisée par 2 pour les éléments mixtes), la taille de la matrice est ordonné comme suit :
TRIAMT10 < TRIA2P1D < TRI2TEQ2 < TRIAMT21 < QUADMQ10 < QUAD2Q1D < TRIA2P3D < TRI2THD2 = TRIA2P2C = TRIA2P2D < QUAD2Q2C < QUADMQ21 < QUAD2Q2D

Remarques sur le temps calcul dépensé

1. L'APOLLO DN3000 nécessite environ 2 fois plus de temps que l'APOLLO DN590T.

2. Le temps CPU représenté ici comprend :

- la préparation de l'assemblage,
- l'assemblage de la matrice et du second membre,
- la prise en compte des conditions aux limites explicites,
- la factorisation de CHOLESKY,
- la descente remontée du système factorisé.

3. Le temps d'exécution n'est pas directement proportionnel à la taille de la matrice profil. Par exemple, le profil de TRIA2P1D demande 4370 variables et 11,1 secondes, contre QUAD2Q2D 10403 variables et 12,8 secondes. Cependant, le nombre total de degrés de liberté (ici de l'ordre de 300) est trop faible pour conclure.

4. En bref, le temps CPU peut être ordonné comme suit :

TRIAMT10 < TRIAMT21 < QUADMQ10 < TRI2TEQ2 << TRIA2P3D ≈ QUADMQ21
≈ QUAD2Q1D < TRIA2P2D = TRIA2P2C < TRI2THD2 < TRIA2P1D < QUAD2Q2C
< QUAD2Q2D

2.6. Conclusions

Rapprochons les quatre types de résultats précédemment vus :

- précision de la température
- précision du flux normal sur les arêtes
- place mémoire de la matrice profil
- temps CPU

Si le critère à optimiser est :

- la précision de la température :

choisir TRIA2P3D, TRIA2P2C ou QUADMQ21

éviter TRIA2P1D, QUAD2Q1D, TRIA2P2D

- la précision du flux normal :

choisir QUADMQ21, TRIAMT21, QUADMQ10, TRIA2P3D ou TRIAMT10

éviter TRIA2P1D, QUAD2Q1D

- la précision de la température et du flux normal :

choisir TRIA2P3D ou QUADMQ21

éviter TRIA2P1D, QUAD2Q1D

Le temps CPU ne permet pas de départager les deux meilleurs éléments. En revanche, la place occupée par la matrice de TRIA2P3D (7026) est bien moindre que celle de QUADMQ21 (2*9556).

Cependant, ces deux éléments posent les problèmes suivants :

- **TRIA2P3D** a pour degrés de liberté la valeur de la température et la valeur du gradient de la température. Une condition de DIRICHLET conduit donc à fixer la dérivée tangente au sommet. Or cette tangente au sommet est rarement unique. Si la tangente n'est pas unique, la condition conduit à imposer les valeurs de la dérivée totale première. Dans le cas contraire, il faut transformer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ en $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial n}$ (dérivée tangente et normale) et seulement fixer $\frac{\partial u}{\partial t}$.

L'emploi de relations linéaires devient nécessaire sur des frontières non parallèles aux axes, ce qui pose quelques difficultés. Cependant, le test effectué en n'imposant pas la valeur de la dérivée tangente a fourni des résultats très proches.

De même pour la condition de NEUMANN qui peut être vérifiée de deux façons : soit par la formulation variationnelle du problème, soit en imposant $\frac{\partial u}{\partial n}$ à sa valeur exacte. Là encore, les résultats sont identiques.

- QUADMQ21 traite implicitement les conditions aux limites de type DIRICHLET et FOURIER. En revanche, les conditions de NEUMANN doivent être imposées. Cette permutation entre les conditions aux limites à imposer (DIRICHLET en "conforme" et NEUMANN en "mixte") est assez dérangerante pour un utilisateur non expérimenté. Cependant, le système expert masquant cet aspect, nous espérons que ces éléments finis mixtes seront de plus en plus utilisés.

2.7 Confrontation des conclusions avec un autre test

Afin d'appliquer les conclusions précédentes à un autre cas, considérons un test NAFEMS (Barlow & Davies, 1986) :

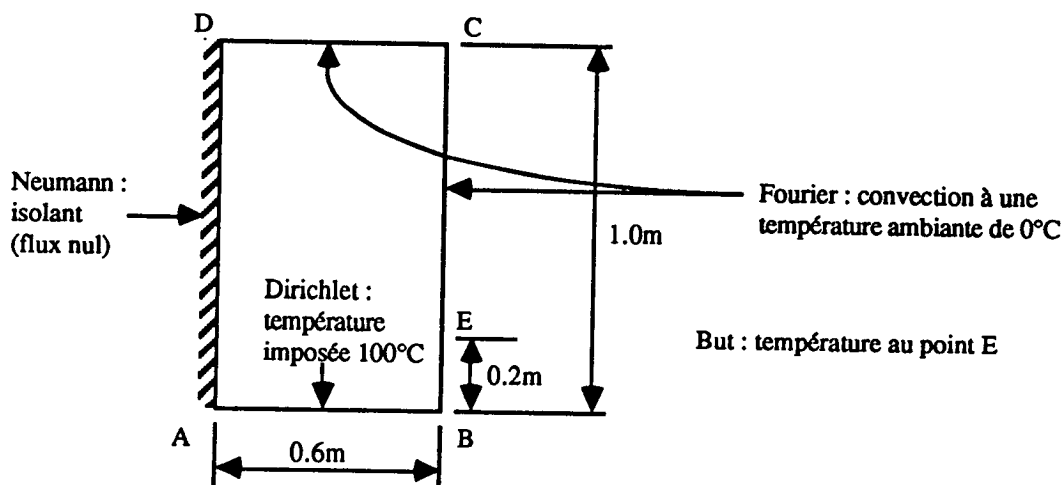


Figure 2.18 : schéma du problème

Pour effectuer des comparaisons pour un nombre de degrés de liberté constant, quatre maillages sont réalisés (se déduisant l'un de l'autre par retriangulation) :

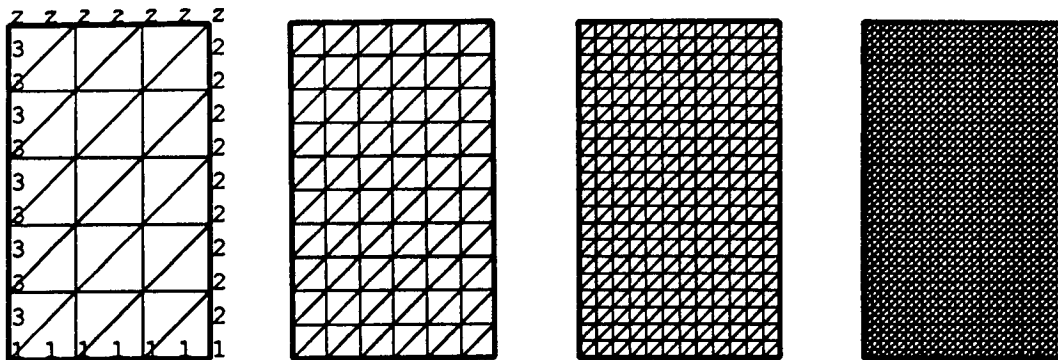


Figure 2.19 : maillages réalisés (sommets : 24 77 273 1025 ; triangles : 30 120 480 1920)

La session DOMINO est la suivante (élément THERTRIA2P3D) :

Type du probleme ? ==> thermique
Formulation ? ==> plan
Interpolation ? ==> hermite

-- SURFACES 1 :
==> materiau isotrope
Conductivite ? 52
Source de chaleur ? 0

-- LIGNES 1 :
==> Dirichlet : temperature imposee (ub)
Temperature imposee (degre) ? 100
dub/dx ? 0
dub/dy ? \

-- LIGNES 2 :
==> Fourier : coefficient de transfert (g)
+ temperature du fluide exterieur (u0)
Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 750
Temperature du fluide exterieur (degre) ? 0
dub/dx ? \
dub/dy ? \

-- LIGNES 3 :
==> Neumann : flux normal de chaleur (fn)
Flux normal de chaleur (W / m2) ? 0
dub/dx ? 0
dub/dy ? \

La solution présente un fort gradient de température au voisinage du segment BE :

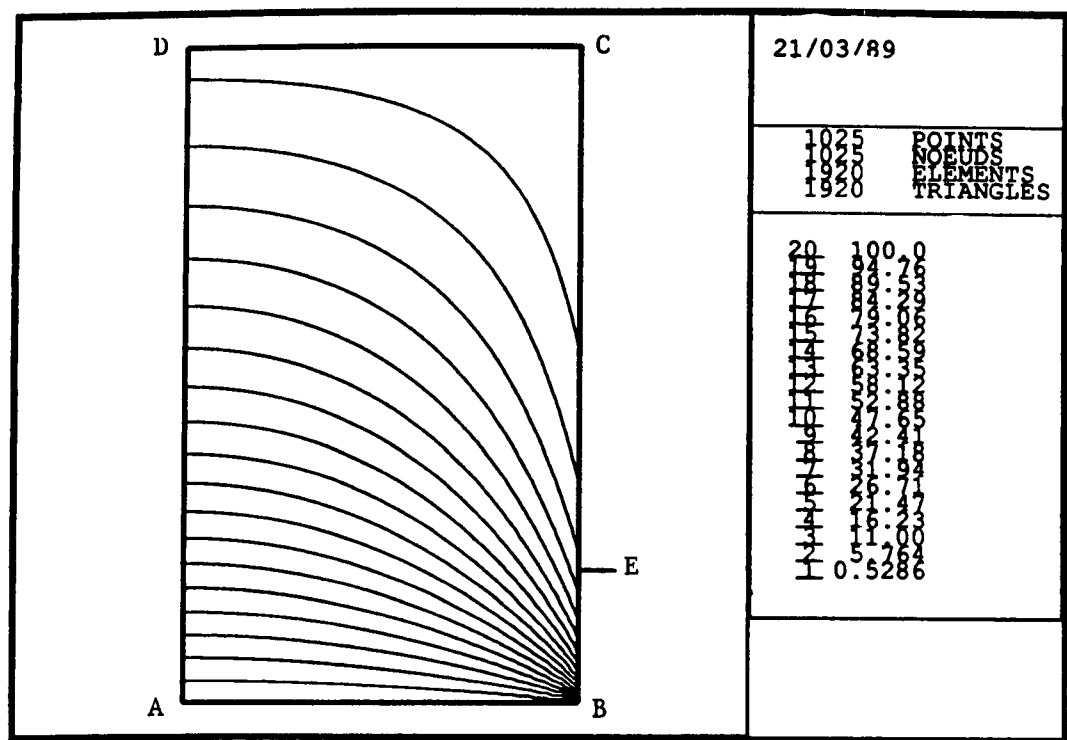


Fig. 2.20 : isothermes (élément TRIA2P1D, 1025 nœuds)

Le tableau ci-dessous représente les températures obtenues au point E :

Nombre total de d.l.*	: 77	: 273	: 1025
Température TRIA2P1D	: 17.2813	: 18.0048	: 18.1935
Température TRIA2P2D	: 17.9869	: 18.3297	: 18.2684
Température TRIA2P2C	: 16.5418	: 18.2656	: 18.2601
Température TRIA2P3D	: 19.3781	: 18.4263	: 18.2440
Température indiquée par NAFEMS	: 18.3°C		

* Dans le cas de l'élément TRIA2P3D, des nombres de degrés de liberté approchants ont été obtenus, respectivement 72, 231, 819.

Ce test NAFEMS montre que :

- un nombre trop faible d'éléments ne permet pas de conclure : les résultats sont peu précis, même pour des polynômes de degré élevé,
- à partir de 231 degrés de liberté, les résultats pour les éléments P2 et P3 deviennent voisins, et encore plus proches à partir de 819 degrés de liberté,
- l'élément TRIA2P1D, à nombre de degrés de liberté constant, est moins précis que les trois autres.

3. THERMIQUE 3D

Par analogie au test thermique 2D (chapitre 2), la solution analytique du problème est :

$$u(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z+\epsilon}$$
 sur le cube unité, avec $\epsilon = 0.1$.

Les maillages sont affinés près de l'origine de la même façon qu'au chapitre 2. Les hexaèdres sont décomposés en pentaèdres ou en tétraèdres (fig. 3.1 à 3.3), ce qui permet d'appeler tous les éléments finis disponibles dans MODULEF.

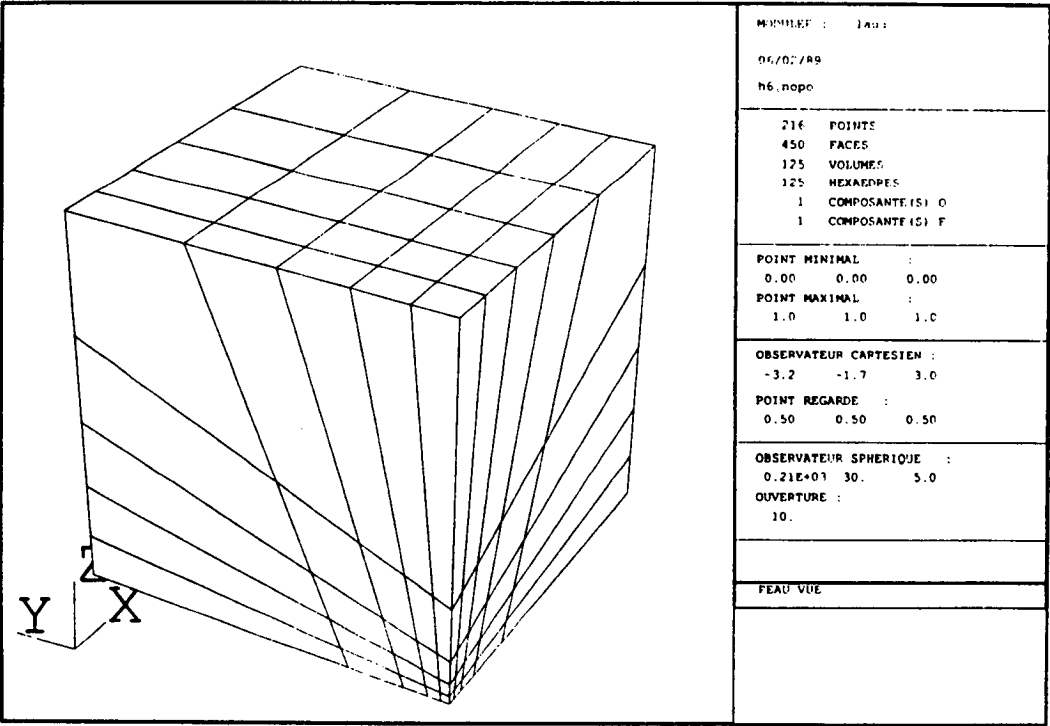


Fig. 3.1 : maillage en 125 hexaèdres

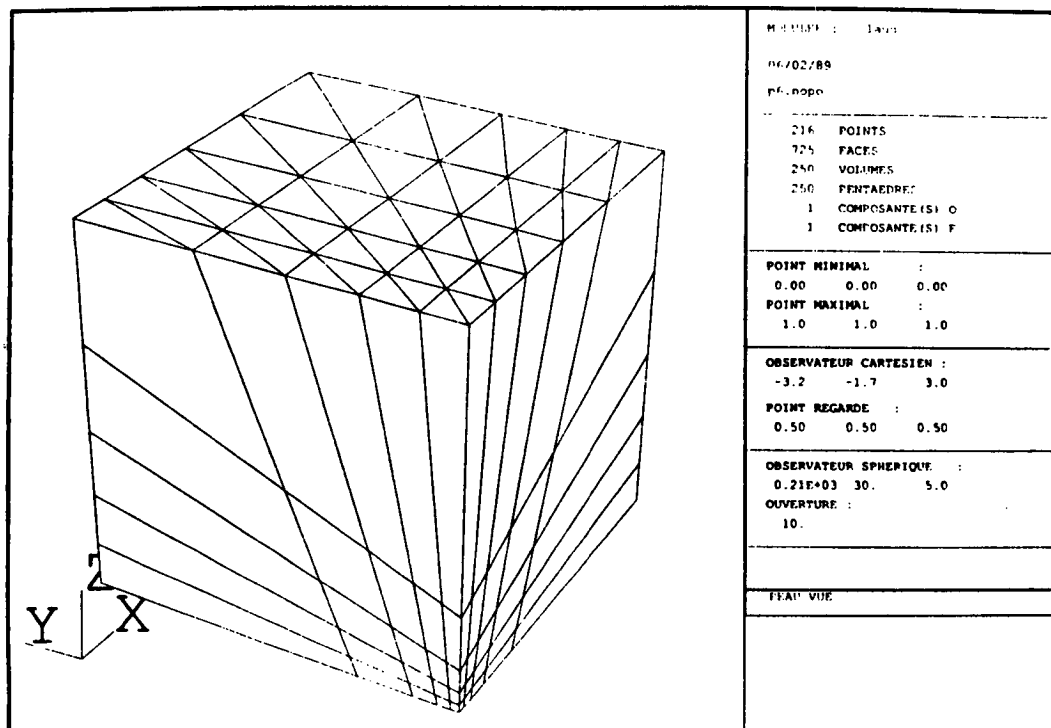


Fig. 3.2 : maillage en 250 pentaèdres

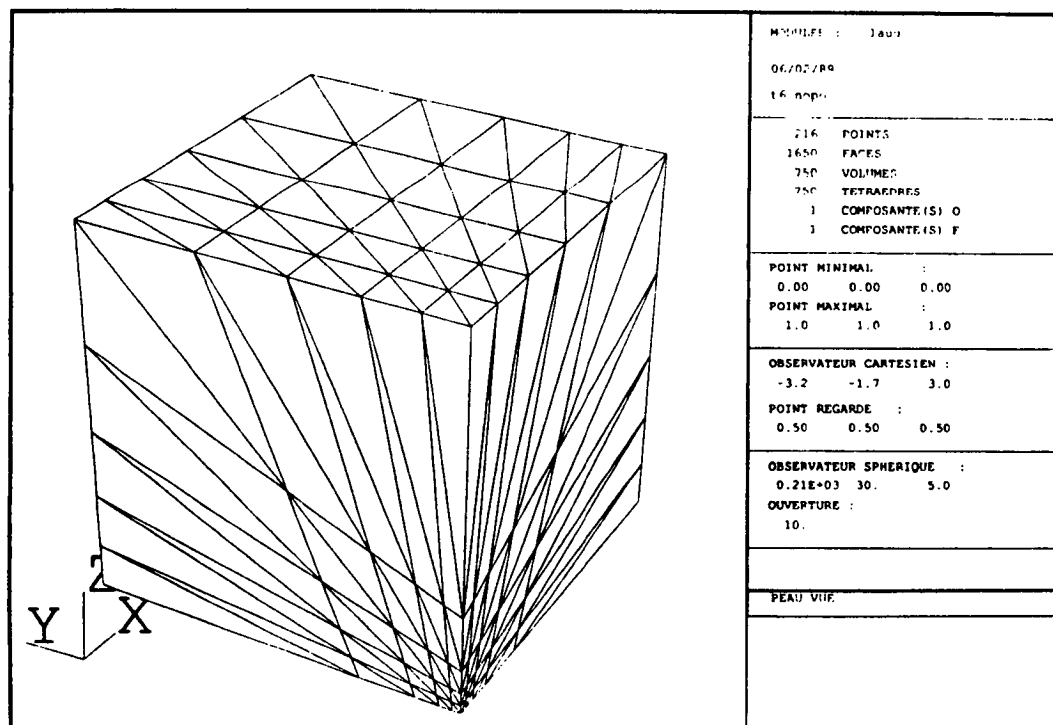


Fig. 3.3 : maillage en 750 tétraèdres

Nous avons vu précédemment que les conditions de Dirichlet (resp. Neumann) étaient plus favorables aux éléments conformes (resp. mixtes), puisque ces conditions sont imposées donc exactes. Un bon compromis est obtenu avec les conditions de Fourier, qui par ailleurs sont plus représentatives des problèmes physiques réellement rencontrés (échanges de chaleur avec un fluide).

Le problème est donc défini par :

- la conductivité : 1

- la source de chaleur : $\frac{-6}{(x+y+z+\epsilon)^3}$

- le coefficient de transfert : 1

- le flux : $\frac{+1}{(x+y+z+\epsilon)^2} + \frac{1}{x+y+z+\epsilon}$ sur les faces 1*

$\frac{-1}{(x+y+z+\epsilon)^2} + \frac{1}{x+y+z+\epsilon}$ sur les faces 2*

* Les faces 1 sont les trois faces du cube formant le trièdre Oxyz, les faces 2 les trois autres faces.

Tous les éléments thermiques 3D de MODULEF ont été testés. Le listing ci-dessous correspond à l'exécution de DOMINO pour l'élément TETR3P2C :

Nom du fichier de maillage ? t6.nopo

Type du probleme ?

1 thermique
2 elasticite
3 thermo-elasticite
? 1

Interpolation ?

1 lagrange
2 mixte
? 1

Degre d'interpolation des temperatures ?

(1 2) ? 2


```

-- VOLUMES 1 :
Traitement ?
  1 materiau isotrope
  2 materiau anisotrope
? 1
Conductivite ? 1
Source de chaleur ? -6. / (X+Y+Z+EPS)**3

-- SURFACES 1 :
Type de condition ?
  1 Dirichlet : temperature imposee (ub)
  2 Fourier   : coefficient de transfert (g)
                  + temperature du fluide exterieur (u0)
  3 Neumann   : flux normal de chaleur (fn)
  4 Aucune condition thermique (reference purement geometrique)
? 2
Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 1
Temperature du fluide exterieur (degre) ? +1./ (X+Y+Z+EPS)**2 +
1./ (X+Y+Z+EPS)

-- SURFACES 2 :
Type de condition ? 2
Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 1
Temperature du fluide exterieur (degre) ? -1./ (X+Y+Z+EPS)**2 +
1./ (X+Y+Z+EPS)

Liste des identifieurs : (X Y Z EPS)
Voulez-vous ajouter des instructions Fortran ? o
PARAMETER (EPS=0.1)

```

Le tracé des isothermes est obtenu en fin de session :

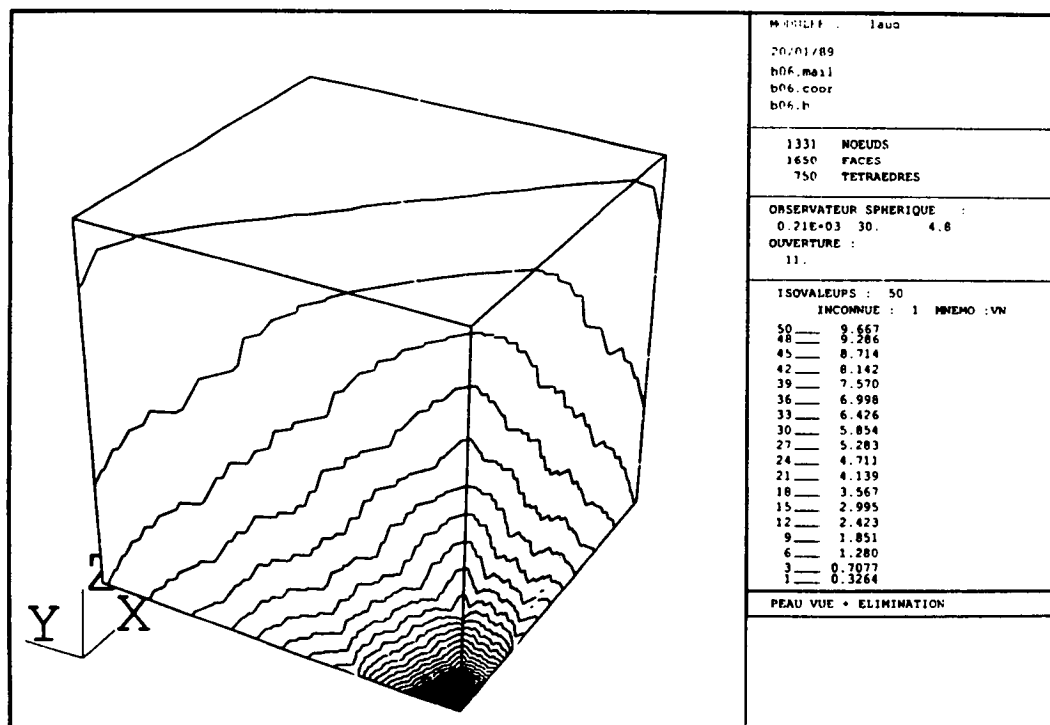


Fig. 3.4 : isothermes (élément TETR3P2C)

Les maillages ont été créés de manière à ce que les nombres de nœuds soient voisins de 1000. Comparons à nouveau les éléments à l'aide de tableaux et d'histogrammes :

ELEMENT	ARETE	NEL	NNO	LMAT	DN4000
HEXA3Q1D	10	729	1000	100900	133.6
HEXA3Q2C	7	216	1225	199485	424.5
HEXAM3H1	8	343	1176	105372*2	97.8
PENT3R1D	10	1458	1000	74576	85.4
PENT3R2C	7	432	1477	223612	459.1
TETR3P1D	10	4374	1000	76790	111.1
TETR3P2C	6	750	1331	183691	350.1
TETRM3T1	5	384	864	37930*2	21.7

ARETE : NOMBRE DE SOMMETS SUR CHAQUE ARETE DU CUBE UNITE
AUTRES COLONNES : VOIR CHAPITRE 2

ELEMENT	ERL2	ERL1	X	Y	Z	UC	UE	UC-UE
HEXA3Q1D	0.049	0.027	0.000	0.000	0.000	9.599	10.000	-0.401
HEXA3Q2C	0.005	0.004	0.000	0.000	0.313	2.345	2.424	-0.079
HEXAM3H1	0.063	0.085	0.779	0.779	0.750	3.586	3.873	-0.287
PENT3R1D	0.092	0.073	0.000	0.000	0.000	9.153	10.000	-0.847
PENT3R2C	0.008	0.006	0.000	0.313	0.000	2.284	2.424	-0.140
TETR3P1D	0.193	0.117	0.000	0.000	0.000	8.328	10.000	-1.672
TETR3P2C	0.028	0.017	0.000	0.000	0.000	9.667	10.000	-0.333
TETRM3T1	0.079	0.061	0.804	0.074	0.037	7.037	6.558	0.479

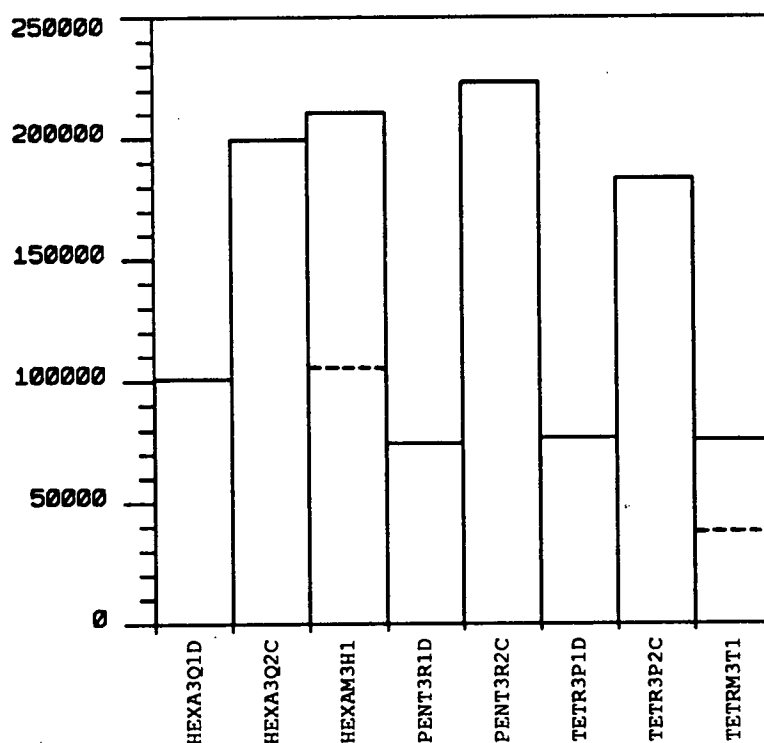


Fig. 3.5 : taille de la matrice profil, en nombre de mots.

N.B. Les éléments finis mixtes sont programmés en double précision.

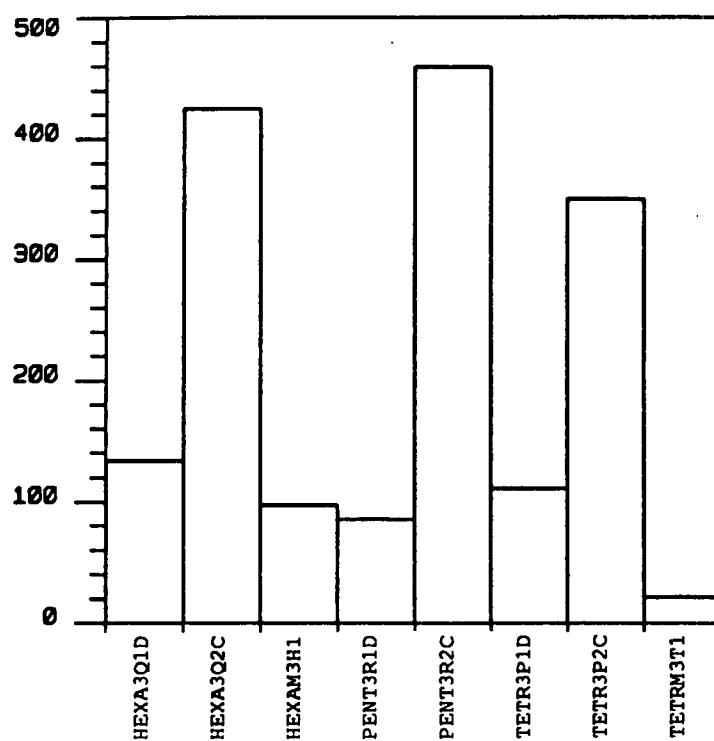


Fig. 3.6 : temps CPU sur Apollo DN4000

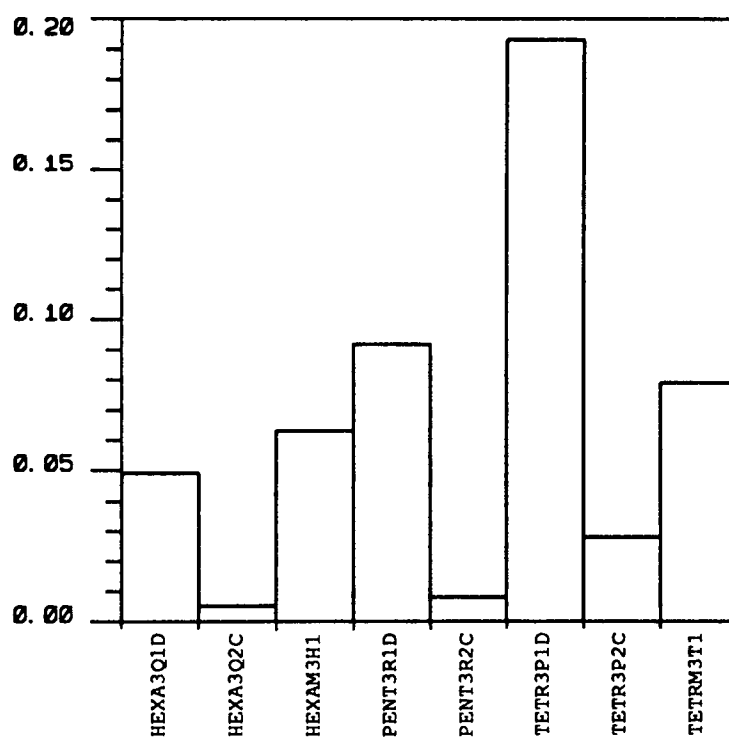


Fig. 3.7 : erreur relative L^2

CONCLUSIONS

- Du point de vue de la précision, l'erreur L^2 est croissante pour :

HEXA3Q2C < PENT3R2C < TETR3P2C < HEXA3Q1D < HEXAM3H1 < TETRM3T1
< PENT3R1D << TETR3P1D

Ces résultats sont logiques pour les éléments conformes, puisque ceux-ci dépendent directement du nombre de degrés de liberté de l'élément.

Les éléments mixtes viennent s'intercaler entre l'hexaèdre et le pentaèdre de degré 1.

- Du point de vue de la place mémoire, le classement croissant donne, en nombre de variables :

TETRM3T1 < PENT3R1D \approx TETR3P1D < HEXA3Q1D \approx HEXAM3H1 <<
TETR3P2C < HEXA3Q2C < PENT3R2C

Dès que le milieu des côtés est ajouté, la taille de la matrice profil croît très sensiblement.

- Du point de vue du temps calcul de la résolution du système :

TETRM3T1 << PENT3R1D < HEXAM3H1 < TETR3P1D < HEXA3Q1D <<
TETR3P2C < HEXA3Q2C < PENT3R2C

Pour conclure, disons que la précision (éléments Lagrange de degré 2) se paie par une taille importante de la matrice et des temps calculs plus élevés. Les éléments mixtes offrent un bon compromis entre la précision, la taille de la matrice et le temps calcul.

4. ELASTICITE 2D

Le problème présenté ici est issu d'un test inclu dans le source MODULEF et décrit dans une brochure associée (Muller & col., 1988). Il a été étendu à l'ensemble des éléments d'élasticité en formulation plane disponibles dans la bibliothèque MODULEF.

Selon le cas, le maillage est formé de quadrangles ou de triangles. Pour les éléments de degré 1, le maillage est subdivisé de manière à conserver un nombre total de degrés de liberté constant :

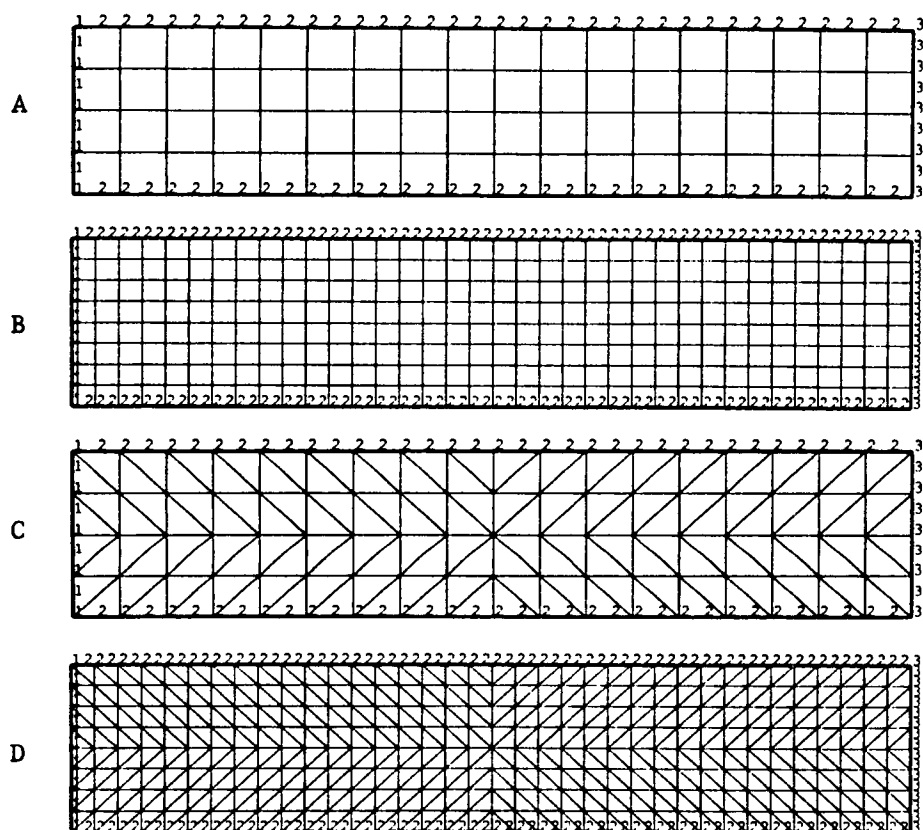


Fig. 4.1 : maillages réalisés :

- A 95 sommets, 72 quadrangles
- B 333 sommets, 288 quadrangles
- C 95 sommets, 144 triangles
- D 333 sommets, 576 triangles

Les conditions aux limites correspondent à un encastrement sur le bord gauche (référence 1) et une force d'intensité 0.1 exercée vers le bas sur le bord droit (référence 3). Pour plus de détails, un exemple de session DOMINO est donné ci-dessous :

```

D      -----
O      |   @   |   @   @   |   @   @   @   @   |
M I    |   |   |   @   |   |   |   |   |   |
N      |   @   |   @   @   |   @   @   |   @   @   @   |
O      -----

```

Nom du fichier de maillage ? t5nopo

Type du probleme ?

- 1 thermique
- 2 elasticite
- 3 thermo-elasticite

? 2

==> elasticite

Formulation ?

- 1 plan
- 2 axi

? 1

==> plan

Interpolation ?

- 1 lagrange
- 2 hermite

? 1

==> lagrange

Degre d'interpolation des déplacements ?

(1 2) ? 1

 DESCRIPTION DES VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS
 SI UNE CONDITION DOIT RESTER LIBRE, TAPPEZ UN BACKSLASH (\)

-- SURFACES 1 :

Traitement ?

- 1 contraintes planes
- 2 deformations planes
- 3 materiau anisotrope

? 2

==> deformations planes

Module d'Young (E) ? 50 000

Coefficient de Poisson (NU) ? 0.25

Efforts extérieurs (exemple : poids) : x ? 0 y ? 0

```

-- LIGNES 1 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 1 : force : x ? \ y ? \   déplacement : x ? 0 y ? 0
-- LIGNES 2 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 2 : force : x ? \ y ? \   déplacement : x ? \ y ? \
-- LIGNES 3 : force : x ? 0 y ? -0.1
-- POINTS 3 : déplacement : x ? \ y ? \

```

Voulez-vous faire une remontée aux contraintes ? o

Arrêt normal du moteur d'inférence.

Après le calcul des déplacements, DOMINO provoque l'affichage de la déformée :

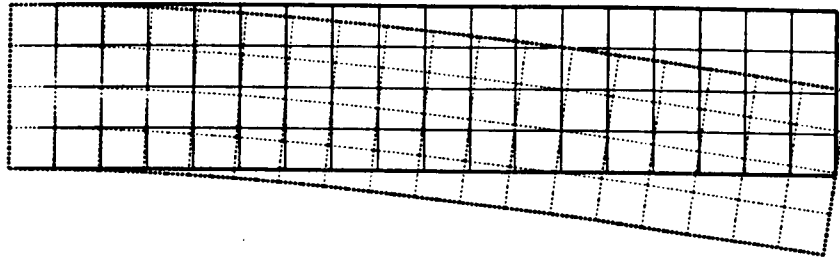


Fig. 4.2 : déformée obtenue avec l'élément QUAD2Q2C (amplifiée 500 fois)

Ensuite, DOMINO active le calcul et la visualisation des contraintes.

Dans le cas général, les contraintes sont définies par un tenseur 3x3 qui se ramène à un tenseur principal de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Il existe alors plusieurs critères pour apprécier ces contraintes, parmi lesquels :

- critère de Tresca : $\Sigma_T = \frac{1}{2} \sqrt{\sup (\sigma_I \sigma_J)^2}$

- critère de Von Mises : $\Sigma_V = \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$

Ici, en déformations planes, le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

avec : $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

$\sigma_{33} = \gamma (\sigma_{11} + \sigma_{22})$ dans le cas isotrope

La remontée aux contraintes (processeur STREXX) donne en chaque élément les trois valeurs σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} .

Le post-processeur graphique (TRSTXX) néglige $\sigma_{III} = \sigma_{33}$, et offre alors plusieurs modes de représentation :

- contraintes principales, connaissant les deux directions principales et les deux valeurs σ_I et σ_{II} .
- critère de Tresca (par densité des hachures).
- critère de Von Mises (idem).

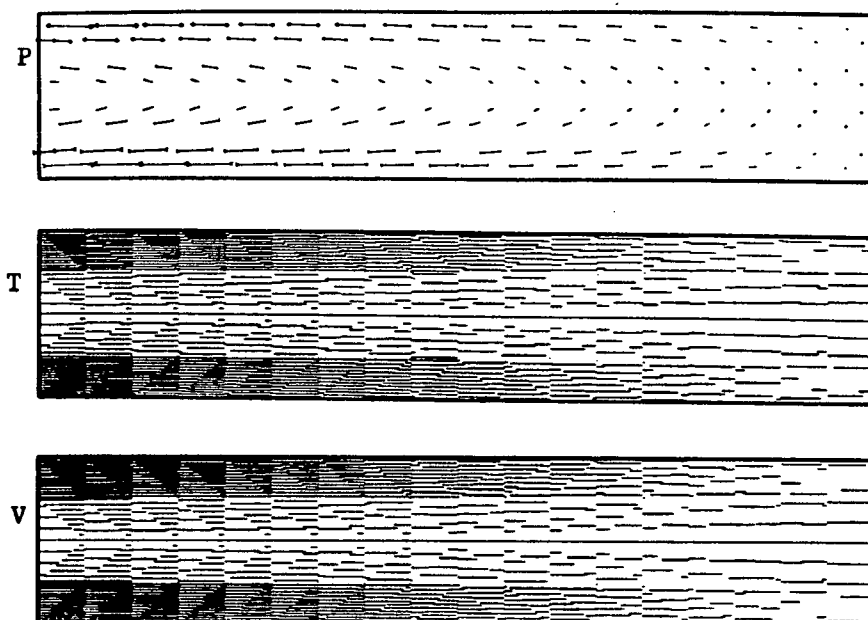


Fig. 4.3 : représentation approchée des contraintes (élément TRIA2P3D) :
P contraintes principales, T critère de Tresca, V critère de Von Mises

Puisque la solution exacte du problème n'est pas connue, nous comparons les éléments entre eux selon la flèche maximale obtenue et selon le critère de Tresca, en supposant que les meilleures valeurs sont obtenues avec l'élément TRIA2P3D (théoriquement le plus précis).

ELEMENT	NEL	NNO	NDL	LMAT	DN3000	-FLECHE*1000	TRESCA
QUAD2Q1D	288	333	666	27694	16.7	3.633	2.6
QUAD2Q2C	72	261	522	28094	14.6	3.849	2.1
TRIA2P1D	576	333	666	26566	19.0	3.646	3.0
TRIA2P2C	144	333	666	37414	20.1	3.850	2.5
TRIA2P2D	144	333	666	37414	19.0	3.850	2.5
TRIA2P3D	144	95	570	38334	26.8	3.849	2.4

Conclusions

- Les résultats des éléments LAGRANGE de degré 2 sont pratiquement identiques à ceux de l'élément HERMITE de degré 3.
- Les éléments LAGRANGE de degré 1 sont moins précis.
- Du point de vue occupation de la mémoire, la matrice profil est d'autant plus encombrante que le degré est élevé.
- Du point de vue temps calcul, à nombre de degrés de liberté presque constant, le nombre d'éléments plus grand à l'assemblage peut compenser une matrice profil plus réduite (TRIA2P1D 576 triangles, 26566 variables, 19.0 secondes et TRIA2P2D 144 triangles, 37414 variables, 19.0 secondes).

Au total, il est préférable de choisir des éléments de degré supérieur ou égal à 2.

5. ÉLASTICITÉ 3D

En reprenant l'exemple 2D du chapitre précédent, nous traitons le cas d'un barreau horizontal, cette fois-ci en 3D :

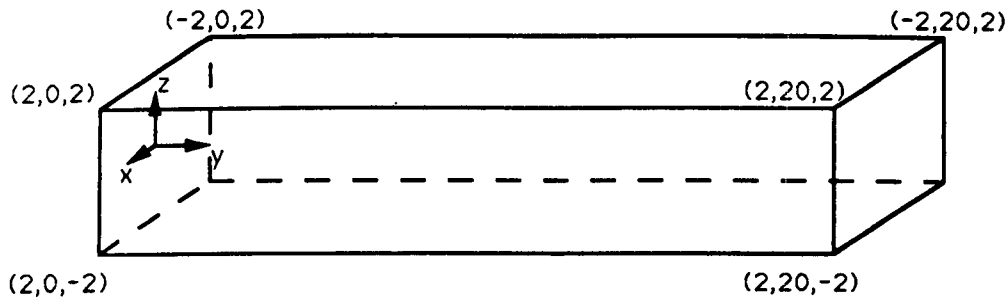


Fig. 5.1 : barreau horizontal en 3D

Le maillage est formé d'hexaèdres, de pentaèdres ou de tétraèdres :

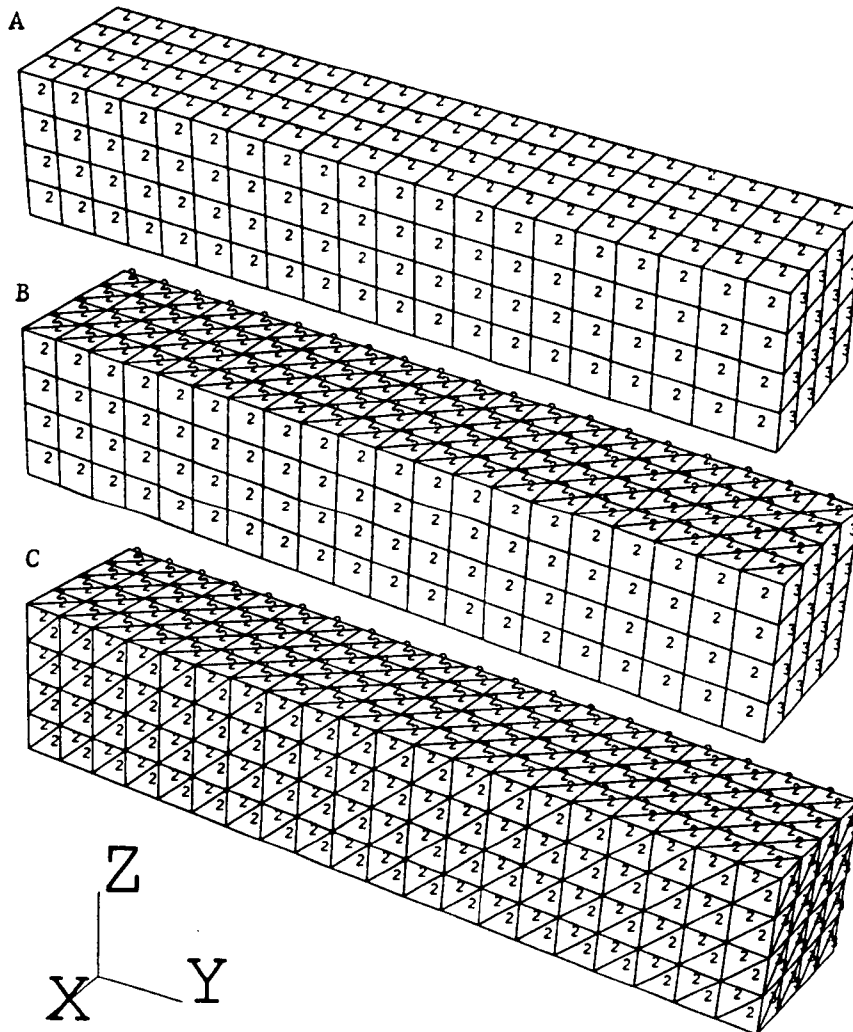


Fig. 5.2 : maillages réalisés :

- A 525 sommets, 1136 faces, 320 hexaèdres
- B 525 sommets, 1856 faces, 640 pentaèdres
- C 525 sommets, 4192 faces, 1920 tétraèdres

Les conditions aux limites sont similaires à celles du chapitre précédent (encastrement sur le bord gauche et force verticale d'intensité 0.1 sur le bord droit), ce qui se traduit par la session suivante :

```

D      -----
O      | @      | @  @ |      | @  @ | @  @ |      | @  @  @ |
M I    |      |      @ |      |      @ |      |      @  @  @ |
N      |      @ | @  @ |      | @  @ |      |      @  @  @ |
O      -----

```

Nom du fichier de maillage ? t.nopo

Type du probleme ?

- 1 thermique
- 2 elasticite
- 3 thermo-elasticite

? 2

=> elasticite

Elements : (elastetr3pld)

DESCRIPTION DES VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS

SI UNE CONDITION DOIT RESTER LIBRE, TAPEZ UN BACKSLASH (\)

-- VOLUMES 1 :

Traitement ?

- 1 materiau isotrope
- 2 materiau orthotrope
- 3 materiau anisotrope

? 1

=> materiau isotrope

Module d'Young (E) ? 50 000

Coefficient de Poisson (NU) ? 0.25

Efforts extérieurs (exemple : poids) : x ? 0 y ? 0 z ? 0

-- SURFACES 1 : force : x ? \ y ? \ z ? \

-- POINTS 1 : force : x ? \ y ? \ z ? \

 deplacement : x ? 0 y ? 0 z ? 0

-- SURFACES 2 : force : x ? \ y ? \ z ? \

-- POINTS 2 : force : x ? \ y ? \ z ? \

 deplacement : x ? \ y ? \ z ? \

-- SURFACES 3 : force : x ? 0 y ? 0 z ? -0.1

-- POINTS 3 : deplacement : x ? \ y ? \ z ? \

Voulez-vous faire une remontee aux contraintes ? o

Arret normal du moteur d'inference.

La déformée obtenue finalement à l'allure suivante :

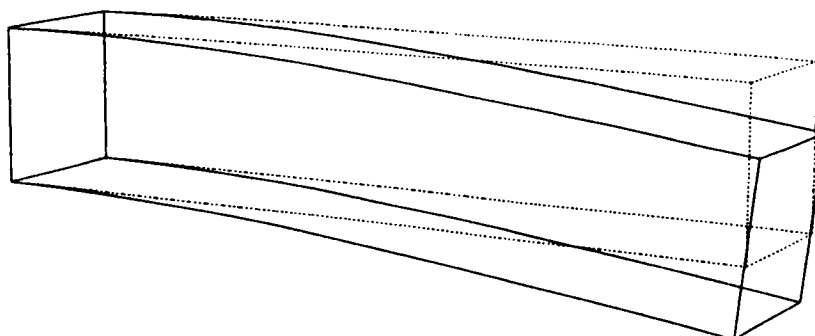


Fig. 5.3 : déformée obtenue avec l'élément HEXA3Q2C (amplifiée 400 fois)

A titre indicatif, nous donnons ici un tableau récapitulatif :

ELEMENT	NEL	NNO	NDL	LMAT	CPU	-FLECHE*1000
HEXA3Q1D	320	525	1050	286488	134.5	3.940
HEXA3Q2C	320	1865	3730	3107994	3914.2	4.078
HEXA3Q2D	320	1865	3730	3107994	3913.3	4.078
PENT3R1D	640	525	1050	236988	102.5	3.346
TETR3P1D	1920	525	1050	244026	122.6	3.311

Conclusions :

- Une fois de plus, le classement par erreur croissante est le suivant :

$$\text{HEXA3Q2}_D^C < \text{HEXA3Q1D} \ll \text{PENT3R1D} < \text{TETR3P1D}$$

- En ce qui concerne la place occupée par la matrice profil :

$$\text{PENT3R1D} \approx \text{TETR3P1D} \approx \text{HEXA3Q1D} \ll \text{HEXA3Q2}_D^C$$

- Le temps calcul est considérable pour HEXA3Q2_D^C

Au total, **HEXA3Q1D** semble offrir sur cet exemple le meilleur compromis entre précision, encombrement et temps calcul.

6. THERMO-ÉLASTICITÉ AXISYMETRIQUE

Nous proposons de tester tous les éléments axisymétriques de MODULEF dans le cadre d'un problème de thermo-élasticité. La pièce étudiée n'est autre qu'une tasse de café illustrée par la figure suivante :

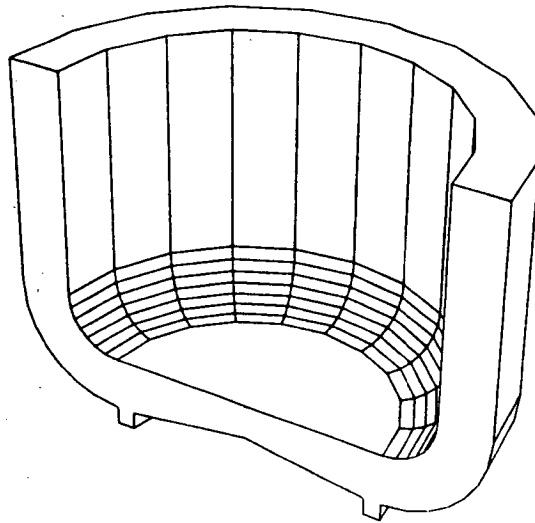


Fig. 6.1 : demi-section de la tasse de café.

La tasse contient du café dont la température est supposée constante (90 °C). Du fait de l'échauffement, elle se dilate et le but du problème est de calculer la déformation qui en résulte. Plus formellement, les caractéristiques du problème thermique et du problème d'élasticité sont les suivantes :

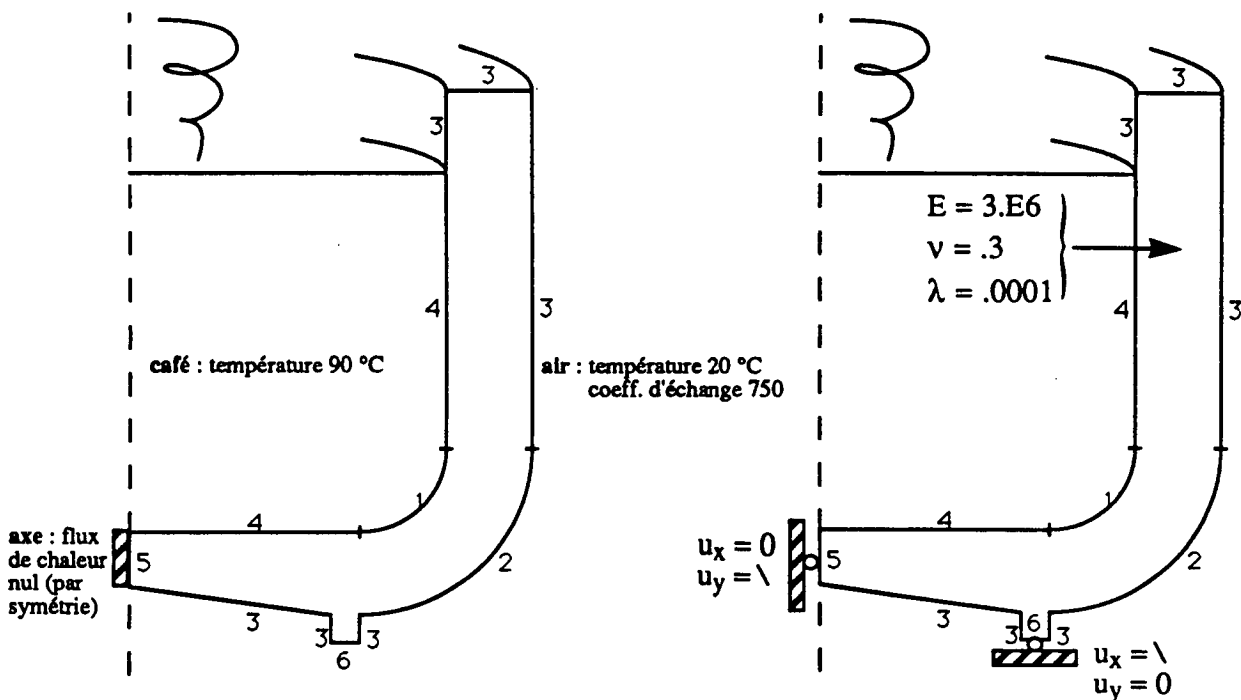


Fig. 6.2 : le problème thermo-élasticité (\ signifie libre).

Les maillages réalisés sont les suivants :

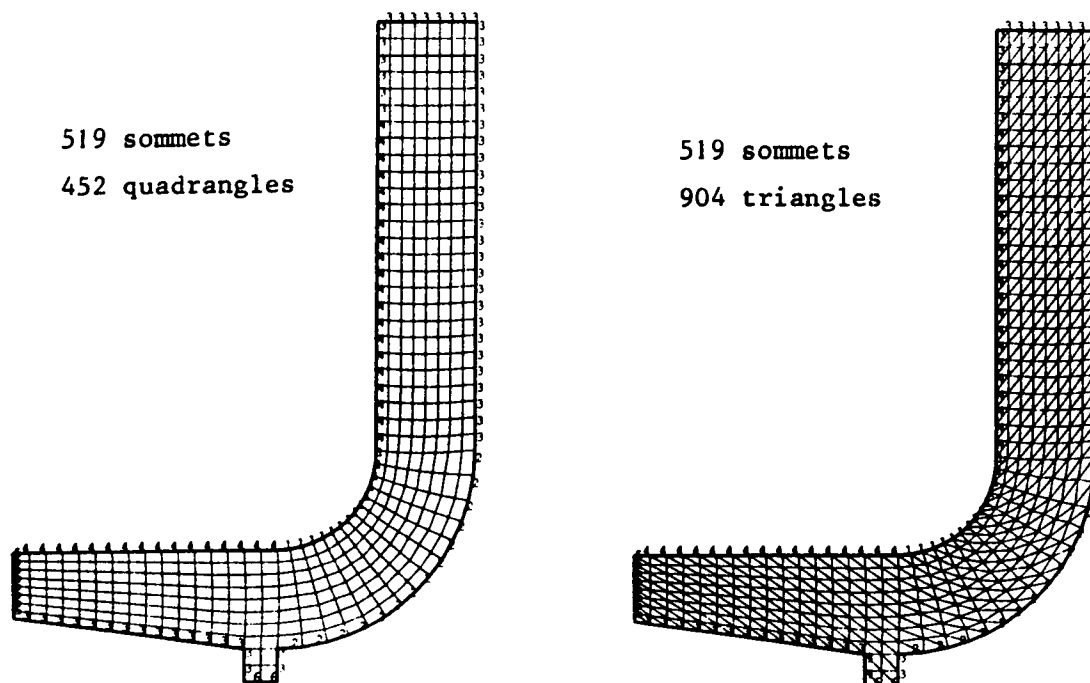


Fig. 6.3 Maillage en quadrangles ou en triangles

La session DOMINO se déroule alors de la manière suivante (cas des éléments THERQUADAQ2C et ELASQUADAQ2C) :

D	-----	-----	-----
O	e e e	e e e	e e e e
M I	e	e e	e e e
N	e e e	e e e	e e e e
O	-----	-----	-----

Nom du fichier de maillage ? cafe.nopo

Type du probleme ?

- 1 thermique
- 2 elasticite
- 3 thermo-elasticite

? 3

==> thermo-elasticite

Formulation ?

- 1 plan
- 2 axi

? 2

==> axi

Degre d'interpolation des déplacements ?

(1 2) ? 2

DESCRIPTION DES VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS
SI UNE CONDITION DOIT RESTER LIBRE, TAPEZ UN BACKSLASH (\)

-- SURFACES 1 :

Traitement ?

1 materiau isotrope

2 materiau anisotrope

? 1

Conductivite ? 50

Source de chaleur ? 0

-- LIGNES 1 :

Temperature imposee (degre) ? 90

-- LIGNES 2 :

+ temperature du fluide exterieur (u0)

Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 750

Temperature du fluide exterieur (degre) ? 20

-- LIGNES 3 :

+ temperature du fluide exterieur (u0)

Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 750

Temperature du fluide exterieur (degre) ? 20

-- LIGNES 4 :

Temperature imposee (degre) ? 90

-- LIGNES 5 :

Flux normal de chaleur (W / m2) ? 0

-- LIGNES 6 :

+ temperature du fluide exterieur (u0)

Coefficient de transfert (W / m2 degre) ? 750

Temperature du fluide exterieur (degre) ? 20

DESCRIPTION DES VOLUMES, SURFACES, LIGNES, POINTS
SI UNE CONDITION DOIT RESTER LIBRE, TAPEZ UN BACKSLASH (\)

-- SURFACES 1 :

Traitement ?

1 materiau isotrope

2 materiau anisotrope

? 1

Module d'Young (E) ? 3.E6

Coefficient de Poisson (NU) ? .3

Coefficient de dilatation ? .0001

Efforts exterieurs (exemple : poids) : x ? 0 y ? 0

```

-- LIGNES 1 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 1 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? \ y ? \
-- LIGNES 2 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 2 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? \ y ? \
-- LIGNES 3 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 3 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? \ y ? \
-- LIGNES 4 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 4 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? \ y ? \
-- LIGNES 5 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 5 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? 0 y ? \
-- LIGNES 6 : force : x ? \ y ? \
-- POINTS 6 : force : x ? \ y ? \
    déplacement : x ? \ y ? 0

```

Voulez-vous faire une remontee aux contraintes ? o

Arret normal du moteur d'inference.

Au cours de la session, les figures suivantes apparaissent :

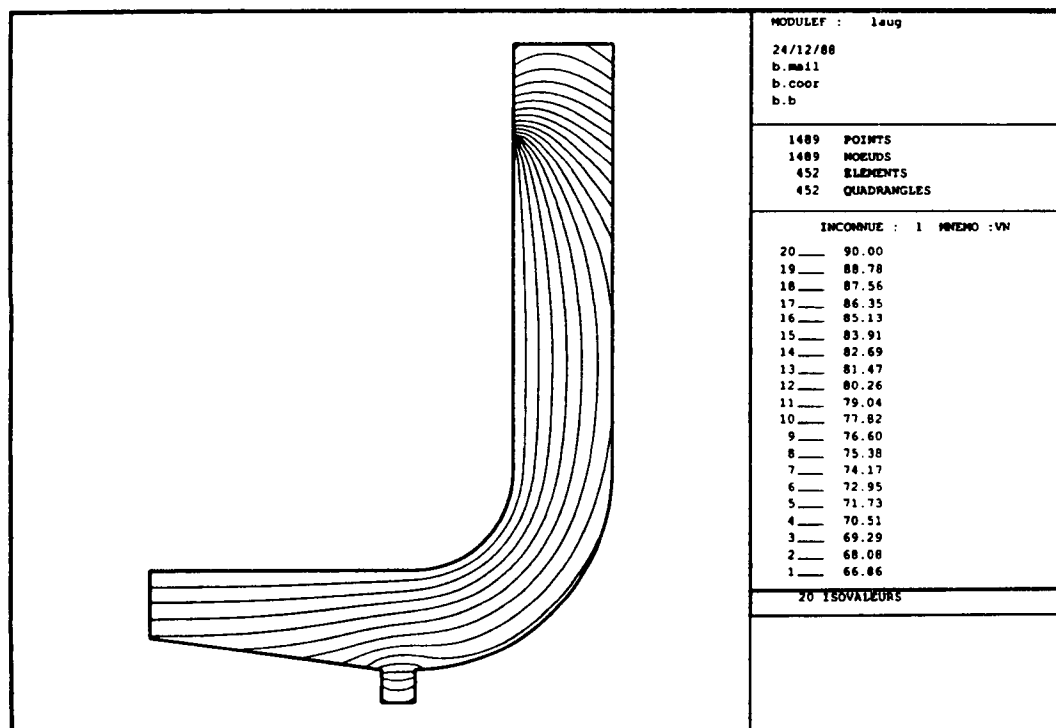


Fig. 6.4 : isothermes (élément THERQUADAQ2C)

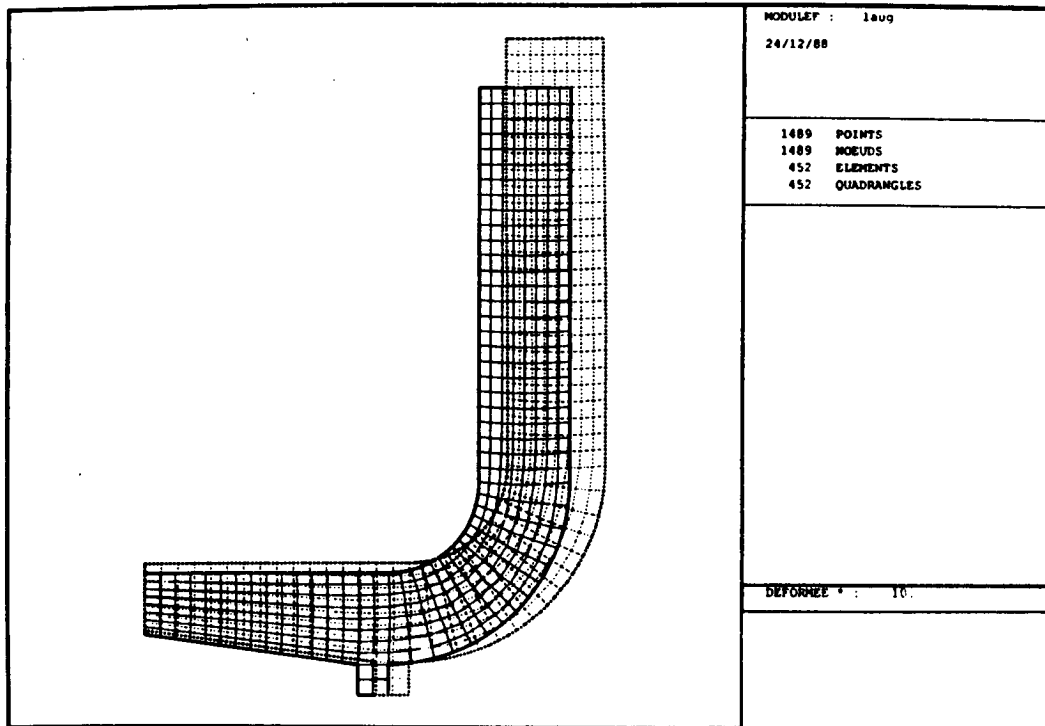


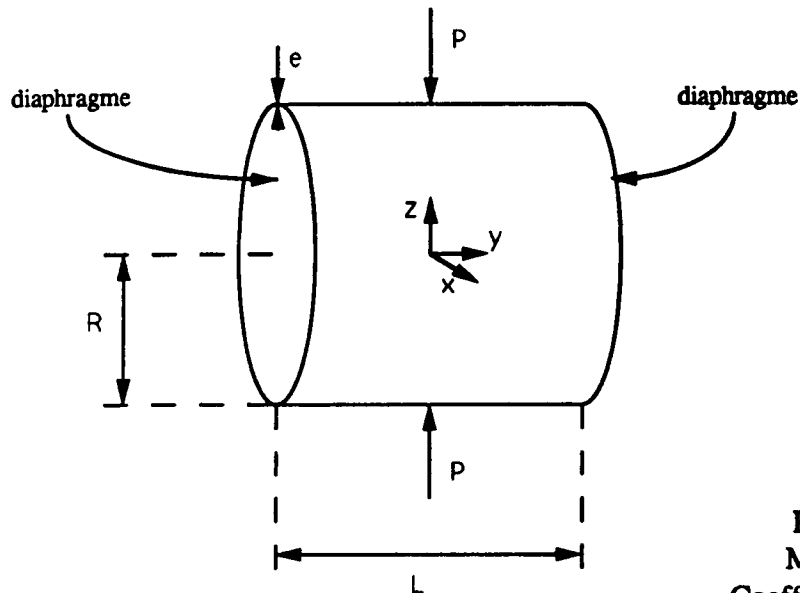
Fig. 6.5 : déformée (amplifiée 10 fois, élément ELASQUADAQ2C)

En conclusion, le système expert DOMINO est capable de traiter des problèmes de thermo-élasticité avec tous les éléments axymétriques de MODULEF :

THERQUADAQ1C	ELASQUADAQ1C
THERQUADAQ2C	ELASQUADAQ2C
THERTRIAAP1D	ELASTRIAAP1D
THERTRIAAP2C	ELASTRIAAP2C

7 - COQUE MINCE

Le problème traité est celui de la "coque cylindrique pincée" (ADINA, 1983) (Meek & Tan, 1986). La coque cylindrique est schématisée sur la figure 7.1. Elle repose en ses deux extrémités sur des diaphragmes rigides, et est chargée en son milieu par deux forces concentrées, diamétralement opposées. Ce test est connu comme étant un cas critique, du fait des forts gradients en déplacements et en contraintes (Murthy & Gallagher, 1985).



Rayon : $R = 100$
 Epaisseur : $e = 1$
 Longueur : $L = 200$
 Force de pincement : $P = 1$
 Module d'Young : $E = 10^7$
 Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

Fig 7.1 : cylindre pincé à bords soutenus

Maillage : Compte tenu des symétries, il suffit de traiter un huitième de cylindre, sur lequel s'exerce une force $P/4$. Le maillage doit être affiné près du point où s'exerce cette force. Ceci conduit, par exemple, à réaliser dans un premier temps un carré unité dont les arêtes suivent une progression géométrique de raison 0.8 :

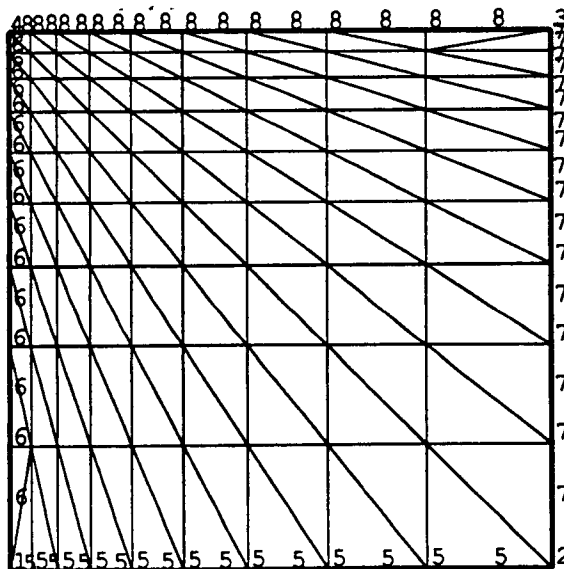


Fig. 7.2 : maillage 2D (100 sommets, 162 triangles)

Ensuite, ce carré est projeté dans l'espace par une transformation $(X,Y) \rightarrow (X3,Y3,Z3)$:

```
SUBROUTINE F2D3D(X,Y,X3,Y3,Z3,N)
PARAMETER (L=200, R=100., PI=3.141593)
X3 = X * L/2
Y3 = R * COS(Y * PI/2)
Z3 = R * SIN(Y * PI/2)
END
```

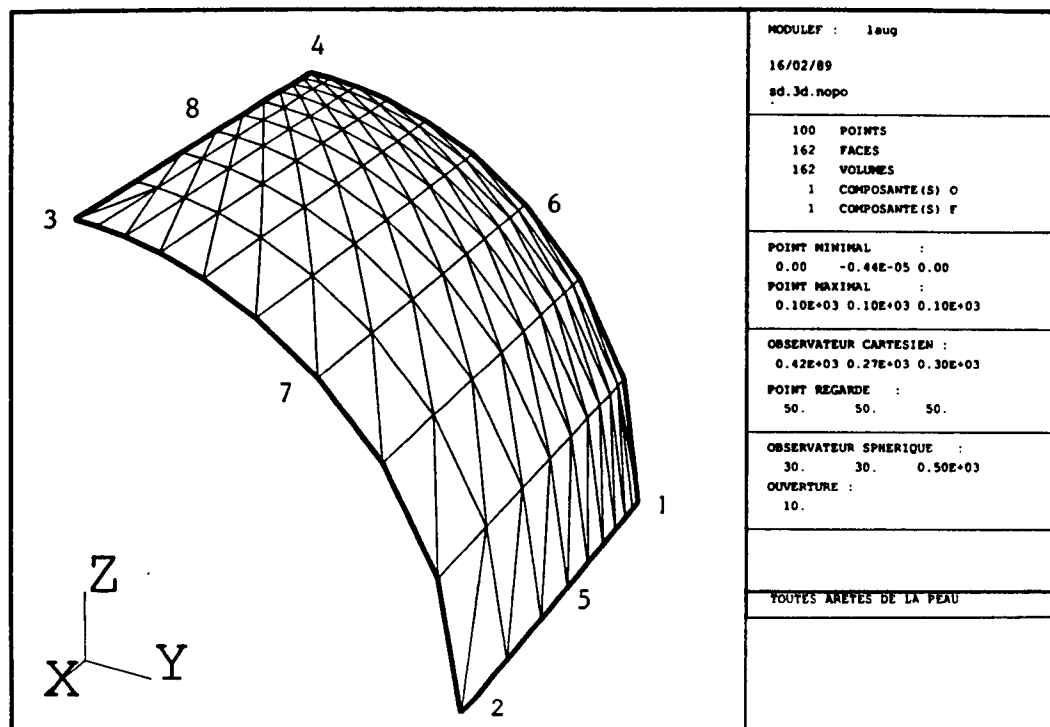


Fig. 7.3 : maillage 3D (100 sommets, 162 triangles)

Puisque le maillage est tridimensionnel et contient des triangles, DOMINO choisit automatiquement une formulation de type "coque", sans poser de questions à l'utilisateur. Plus précisément, la base de connaissances contient l'élément TRIACQFA décrit sommairement ci-dessous.

Elément TRIACQFA :

La coque mince est modélisée par des facettes planes triangulaires. Les effets de membrane et de flexion sont découplés au niveau local. L'élément a 18 degrés de liberté qui résultent de la superposition :

- d'un élément de membrane à déformation constante,
- d'un élément de flexion DKT : formulation basée sur l'introduction de l'hypothèse de Kirchhoff sous forme discrète (Batoz, 1982),
- d'un coefficient de rigidité fictif autour de la normale au plan local.

En chaque sommet du triangle se trouve un nœud ayant 6 degrés de liberté :

3 déplacements (u_x, u_y, u_z) et 3 rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) :

$\left. \begin{matrix} u_x \\ u_y \end{matrix} \right\}$ P1 Lagrange
 $\left. \begin{matrix} u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{matrix} \right\}$ DKT
 θ_z } Rotation autour de la normale

Les conditions aux limites non libres du problème sont :

- Sur la ligne de référence 5 :
Symétrie par rapport au plan xOy $\Rightarrow u_z = \theta_x = \theta_y = 0$
 - Sur la ligne de référence 6 :
Symétrie par rapport au plan yOz $\Rightarrow u_x = \theta_y = \theta_z = 0$
 - Sur la ligne de référence 7 :
Soutien par un diaphragme rigide $\Rightarrow u_y = u_z = \theta_y = \theta_z = 0$
 - Sur la ligne de référence 8 :
Symétrie par rapport au plan xOz $\Rightarrow u_y = \theta_x = \theta_z = 0$
 - Sur le point de référence 1 :
Intersection des lignes 5 et 6 $\Rightarrow u_x = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$
 - Sur le point de référence 2 :
Intersection des lignes 5 et 7 $\Rightarrow u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$
 - Sur le point de référence 3 :
Intersection des lignes 7 et 8 $\Rightarrow u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$
 - Sur le point de référence 4 :
Intersection des lignes 6 et 8 $\Rightarrow u_x = u_y = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$
- Force ponctuelle : $(0, 0, -1/4)$

En fait, DOMINO permet de combiner plusieurs conditions, ce qui évite de le faire manuellement pour les points référencés (voir par exemple, pour les points de référence 1, le déplacement noté ci-dessous "= 5 6") :

D																			
O																			
M I																			
N																			
O																			

Nom du fichier de maillage ? sd.3d.nopo

Type du problème ?

- 1 thermique
 - 2 elasticite
 - 3 thermo-elasticite
- ? 2

```

-- VOLUMES 1 :
Module d'Young (E) ? 1.E7
Coefficient de Poisson (NU) ? .3
epaisseur ? 1
Efforts extérieurs (exemple : poids) ? \ \ \

-- POINTS 1 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : = 5 6 rotation : = 5 6

-- POINTS 2 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : = 5 7 rotation : = 5 7

-- POINTS 3 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : = 7 8 rotation : = 7 8

-- POINTS 4 :
force : 0 0 -1./4. moment : \ \ \ déplacement : = 6 8 rotation : = 6 8

-- LIGNES 5 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : \ \ 0 rotation : 0 0 \

-- LIGNES 6 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : 0 \ \ rotation : \ 0 0

-- LIGNES 7 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : \ 0 0 rotation : \ 0 0

-- LIGNES 8 :
force : \ \ \      moment : \ \ \ déplacement : \ 0 \ rotation : 0 \ 0

```

D'où les résultats visualisés ci-dessous :

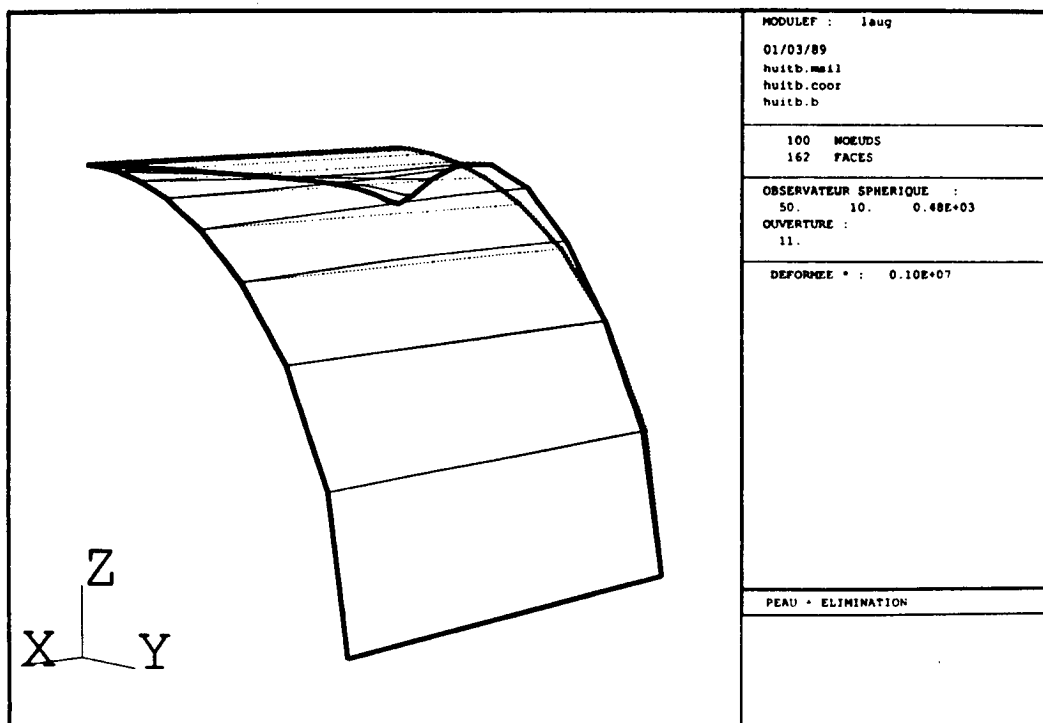


Fig. 7.4 : déformée (amplifiée 10^6 fois)

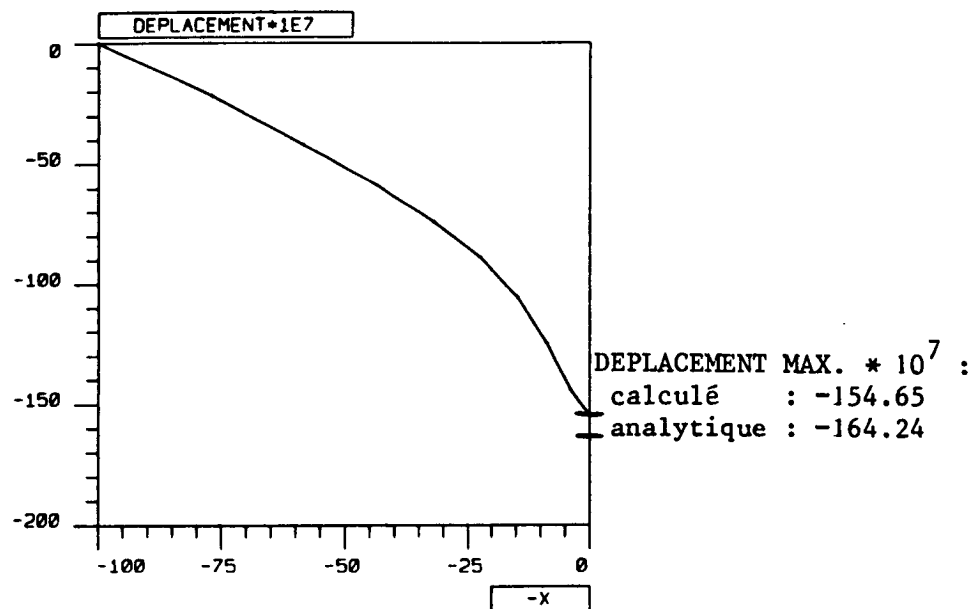


Fig. 7.5 : déplacements verticaux sur la génératrice supérieure du cylindre (réf. 3, 8, 4)

Le déplacement maximal, obtenu sur le nœud de référence 4, a pour valeur calculée $-154.65 \cdot 10^{-7}$, à comparer à la solution analytique $-164.24 \cdot 10^{-7}$ (soit une erreur relative de 5.8%). Les résultats obtenus sont donc satisfaisants.

8. CONCLUSION

Tous les éléments finis de MODULEF présents dans la base de connaissances de DOMINO ont été appelés (thermique et élasticité 2D, 3D, axisymétrique, coque, cf annexe ci-après). Ceci a permis de valider le système expert DOMINO, mais aussi d'évaluer les éléments finis de MODULEF. Notamment, les éléments finis mixtes ont montré leur efficacité.

Grâce à la facilité d'utilisation de DOMINO, un grand nombre de tests ont été rapidement mis en œuvre. A chaque exécution, les données à entrer étaient peu nombreuses et les fichiers intermédiaires étaient gérés de manière transparente.

Cette expérience a montré que DOMINO est un système fiable et qu'il accroît sensiblement la productivité des utilisateurs, plus particulièrement ceux non initiés aux éléments finis. En outre, en incluant dans la base de connaissances les évaluations effectuées ici, il sera possible d'améliorer le mécanisme de sélection des éléments finis.

BIBLIOGRAPHIE

- ADINA Engineering, 1983, "System Verification Manual", Report AE 83-5, Example A.32 : pinched cylindrical shell, shell elements.
- Batoz J.L., 1982, "An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, pp. 1077-1089.
- Barlow J. & Davies G.A.O., 1986, "Selected Finite Element Benchmarks in Structural and Thermal Analysis", NAFEMS (National Agency for Finite Element Methods and Standards), Test n° T4, 1-7-86/I : two dimensional heat transfer with convection.
- Bernadou M., George P.L., Hassim A., Joly P., Laug P., Muller B., Perronnet A., Saltel E., Steer D., Vanderborck G. & Vidrascu M., 1988, "MODULEF : une bibliothèque modulaire d'éléments finis", 382 p., INRIA.
- George P.L., 1987, "Utilisation conversationnelle de MODULEF - Programmes principaux - Programmes conversationnels", Rapport Modulef n°108.
- Laug P., 1987, "Pilotage d'un code modulaire d'éléments finis par un système expert", Rapport de Recherche INRIA n°653.
- Meek J.L. & Tan H.S., 1986, "A faceted shell element with Loof nodes", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 23, pp. 49-67.
- Muller B., Steer D. & Vidrascu M., 1988, "Quelques exemples de test de thermique, élasticité, mécanique des fluides", Rapport Modulef n° 87, pages 71 à 86 (Test n°5 : problème d'élasticité).
- Murthy S.S. & Gallagher R.H., 1986, "A triangular thin-shell finite element based on discrete Kirchhoff Theory", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland).

ANNEXE

Eléments finis de MODULEF présents dans la base de connaissances de DOMINO :

THERTRIA2P1D Triangle P1 Lagrange
THERTRIA2P2D Triangle P2 droit
THERTRIA2P2C Triangle P2 isoparametrique
THERTRIAMT10 Triangle Mixte de degre 1 et 0
THERTRIAMT21 Triangle Mixte de degre 2 et 1
THERTRIAAP1D Triangle axisymetrique de degre 1
THERTRIAAP2C Triangle axisymetrique de degre 2
THERTRIA2P3D Triangle P3 droit Hermite
THERTRI2TEQ2 Triangle Equilibre de degre 2
THERTRI2THD2 Triangle Hybride dual de degre 2
THERQUAD2Q1D Quadrangle Q1 isoparametrique Lagrange
THERQUAD2Q2D Quadrangle Q2 droit
THERQUAD2Q2C Quadrangle Q2 isoparametrique
THERQUADMQ10 Quadrangle Mixte de degre 1 et 0
THERQUADMQ21 Quadrangle Mixte de degre 2 et 1
THERQUADAQ1C Quadrangle axisymetrique de degre 1
THERQUADAQ2C Quadrangle axisymetrique de degre 2
THERTETR3P1D Tetraedre P1 Lagrange
THERTETR3P2C Tetraedre P2 isoparametrique
THERTETRM3T1 Tetraedre Mixte
THERPENT3R1D Pentaedre R1 Lagrange
THERPENT3R2C Pentaedre Q2
THERHEXA3Q1D Hexaedre Q1 Lagrange
THERHEXA3Q2C Hexaedre Q2 isoparametrique
THERHEXAM3H1 Hexaedre Mixte

ELASTRIA2P1D Triangle P1 Lagrange
ELASTRIA2P2D Triangle P2 droit
ELASTRIA2P2C Triangle P2 isoparametrique
ELASTRIAAP1D Triangle P1 axisymetrique thermoelastique
ELASTRIAAP2C Triangle P2 axisymetrique thermoelastique
ELASTRIA2P3D Triangle P3 droit Hermite
ELASTRIACQFA Coque a facettes TRIA2P1D + TRIADKTP
ELASQUAD2Q1D Quadrangle Q1 isoparametrique Lagrange
ELASQUAD2Q2C Quadrangle Q2 isoparametrique
ELASQUADAQ1C Quadrangle Q1 axisymetrique thermoelastique
ELASQUADAQ2C Quadrangle Q2 axisymetrique thermoelastique
ELASTETR3P1D Tetraedre P1 Lagrange
ELASPENT3R1D Pentaedre R1 thermoelastique
ELASHEXA3Q1D Hexaedre Q1 thermoelastique
ELASHEXA3Q2D Hexaedre Q2 droit
ELASHEXA3Q2C Hexaedre Q2 isoparametrique